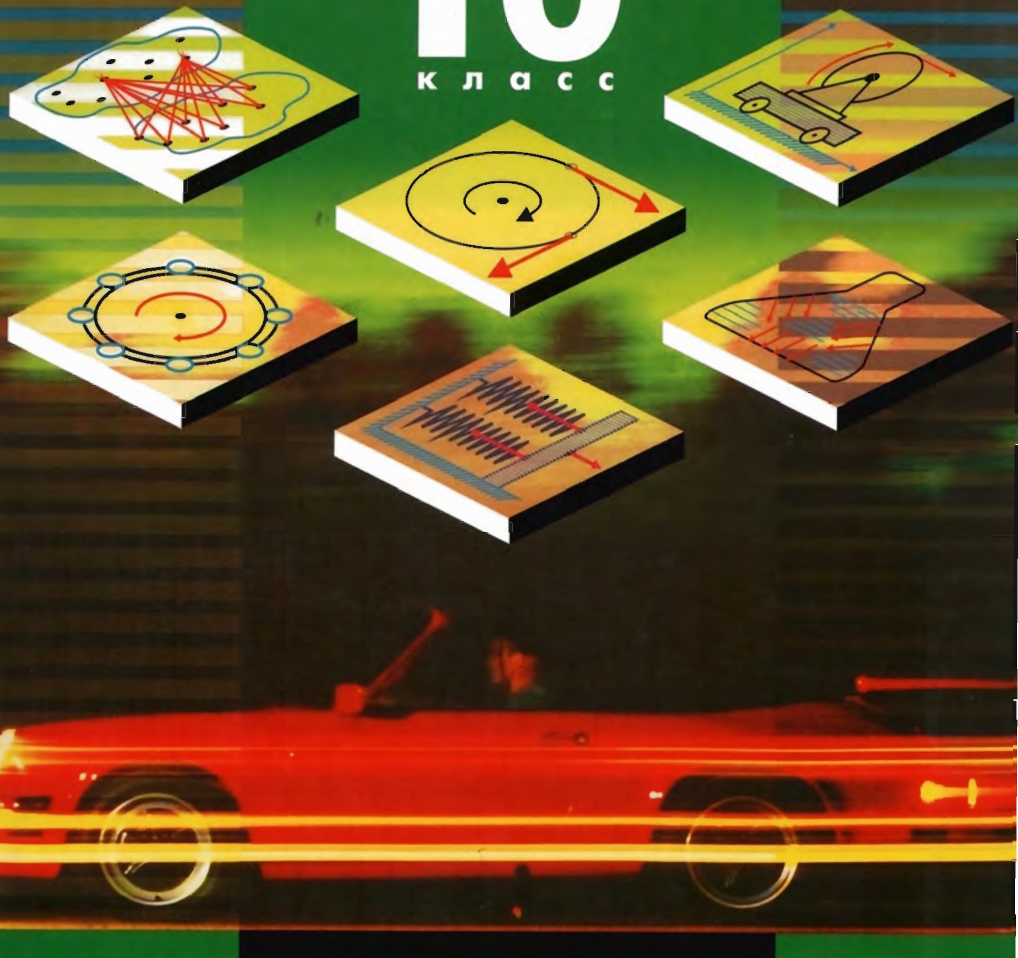
Г. Я. Мякишев

ФИЗИКА

МЕХАНИКА

10 класс



дрофа

ФИЗИКА

МЕХАНИКА

10
класс

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

Учебник для общеобразовательных учреждений

Под редакцией Г. Я. Мякишева

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации

12-е издание, стереотипное

Москва

дрофа

2010

УДК 373.167.1:53
ББК 22.3я721
Ф48

Авторы:
*М. М. Балашов, А. И. Гомонова, А. Б. Долицкий,
Б. Л. Дрибинский, Г. Я. Мякишев, Л. А. Нотов,
Г. Е. Пустовалов, А. З. Синяков, Б. А. Слободсков*

Ф48 **Физика.** Механика. 10 кл. Профильный уровень : учеб. для общеобразоват. учреждений / М. М. Балашов, А. И. Гомонова, А. Б. Долицкий и др. ; под ред. Г. Я. Мякишева. — 12-е изд., стереотип. — М. : Дрофа, 2010. — 495, [1] с. : ил.

ChemToday — школе

В учебнике на современном уровне изложены основные разделы физики. Особое внимание при этом уделяется изложению фундаментальных и наиболее сложных вопросов школьной программы; представлены основные технические применения законов физики; рассмотрены методы решения задач.

Учебник предназначен учащимся 10 классов, в которых физика изучается на профильном уровне, слушателям и преподавателям подготовительных отделений вузов, а также читателям, занимающимся самообразованием и готовящимся к поступлению в вуз.

УДК 373.167.1:53
ББК 22.3я721

Учебное издание

Балашов Михаил Михайлович, **Гомонова** Алина Ивановна,
Долицкий Александр Борисович и др.

ФИЗИКА. МЕХАНИКА

10 класс. Профильный уровень

Учебник для общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией *Е. Н. Тихонова.* Ответственный редактор *И. Г. Власова*
Компьютерная графика *И. В. Головнин.* Оформление *Л. П. Копачева*
Технический редактор *М. В. Биденко.* Компьютерная верстка *Д. А. Дачевский*
Корректор *Г. И. Мосякина*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.009733.08.09 от 18.08.2009.
Подписано к печати 17.12.09. Формат 60 × 90 $^1/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 31,0. Тираж 10 000 экз. Заказ № 24502 (к-sm).
ООО «Дрофа». 127018, Москва, Сущевский вал, 49.

Предложения и замечания по содержанию и оформлению книги просим направлять в редакцию общего образования издательства «Дрофа»: 127018, Москва, а/я 79. Тел.: (495) 795-05-41. E-mail: chief@drofa.ru
По вопросам приобретения продукции издательства «Дрофа» обращаться по адресу: 127018, Москва, Сущевский вал, 49. Тел.: (495) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (495) 795-05-52.

Торговый дом «Школьник». 109172, Москва, ул. Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А.
Тел.: (495) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.
Сеть магазинов «Переплетные птицы». Тел.: (495) 912-45-76.
Интернет-магазин: http://www.drofa.ru

Отпечатано в ОАО «Смоленский полиграфический комбинат».
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

ISBN 978-5-358-08027-0

ВВЕДЕНИЕ[1]

ЗАРОЖДЕНИЕ И РАЗВИТИЕ НАУЧНОГО ВЗГЛЯДА НА МИР

§ 1. НЕОБХОДИМОСТЬ ПОЗНАНИЯ ПРИРОДЫ

Простые истины

Все мы в раннем детстве за два-три года усваиваем солидный «курс физики» — привыкаем к простым вещам и явлениям вокруг нас. Запоминается этот «курс» гораздо прочнее, чем все то, что мы узнаем впоследствии (правда, повторение курса идет непрерывно). Так мы узнаём, что камень всегда падает вниз на землю, что есть твердые предметы, о которые можно ушибиться, что огонь может обжечь и т. д.

Однако, как ни важны подобные знания, накапливаемые ребенком, а впоследствии и взрослым человеком, они еще не образуют науку. Подобный опыт приобретают и многие животные вскоре после рождения, хотя их поведение определяется врожденными инстинктами в гораздо большей степени, чем у человека. Это частные правила, касающиеся течения отдельных явлений. Они говорят нам о том, что произойдет в обычных условиях, но не отвечают на вопрос, почему те или иные события вообще происходят и не могут ли эти события не наступить совсем. Они также не позволяют предсказать, что произойдет в новых, изменившихся условиях.

---

[1] Это введение при первом чтении может показаться сложным. Полезно возвращаться к нему по мере прохождения курса.

Зарождение науки

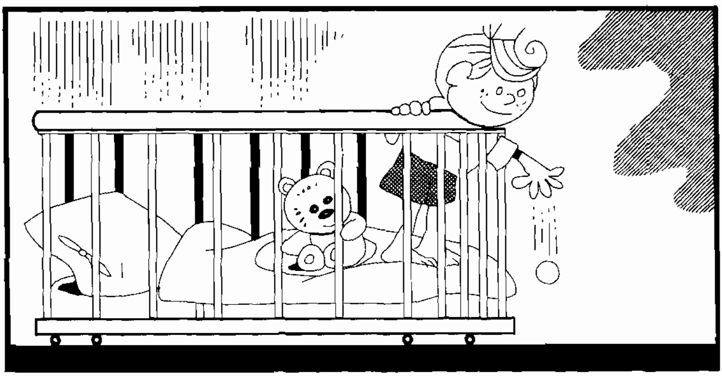
Потребность в понимании окружающего мира, в объяснении относительной устойчивости протекающих в нем событий очень велика. Это необходимо для уверенности в завтрашнем дне, для возможности предвидения того, что произойдет. Людям необходимо понять устройство окружающего мира, чтобы выжить, чтобы использовать силы природы для облегчения труда, улучшения условий жизни.

В результате длительной борьбы за существование у человека появилась внутренняя потребность в познании природы. В первую очередь выживали те, кто лучше понимал окружающий мир и стремился расширить свои познания. В конечном итоге человеческий мозг оказался более могучим орудием в борьбе за существование, чем клыки, бивни и когти. Благодаря знаниям человек выжил и подчинил себе Землю.

Стремление увидеть в разрозненных событиях нечто общее, понять причины как обычных, так и редко встречающихся явлений привело к зарождению науки.

Наука и человечество

Может показаться, что в наше время нет необходимости в приобретении все более новых знаний для того, чтобы выжить. Но это не так. Энергетические ресурсы Земли (нефть, газ, каменный уголь и др.), рудные месторождения быстро истощаются. И без открытия новых источников энергии, новых материалов, заменяющих привычные металлы, человечество не в состоянии существовать длительное время.



Потребность в глубоких знаниях — один из сильнейших импульсов, побуждающих человека к действию. Не только прикладное значение науки, но и радость познания, красота открывающихся нам законов природы привлекла и продолжает привлекать людей.

§ 2. НАУКА ДЛЯ ВСЕХ

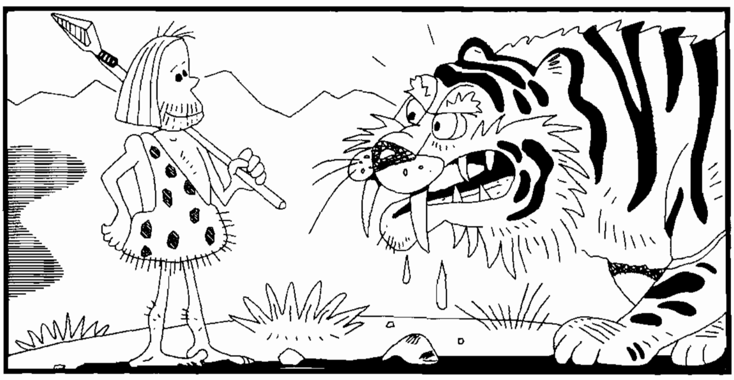
Эстафета передачи знаний

Знания приобретаются человеком на протяжении всей жизни. Но приобретенные новые качества, в том числе и знания, не передаются по наследству. Новые свойства, как физические, так и относящиеся к областям психики, не наследуются ни человеком, ни животным. Вследствие этого приобретенный животным опыт почти полностью теряется с его смертью. Передача опыта от родителей детенышам играет у животных очень малую роль по сравнению с врожденным опытом поведения.

С тех пор как организмы с развитым мозгом получили возможность передавать своим потомкам большой объем информации посредством речи, эволюция преодолела барьер на пути наследственной передачи приобретенных свойств. Речь и возникла из-за потребности в быстрой и точной передаче жизненно важной информации.

Наука представляет собой одно из важнейших направлений развития человеческого общества, ставшее возможным в результате накопления идей и передачи опыта. Без передачи накопленных знаний наука немыслима. За время одной человеческой жизни науку создать нельзя.

Много веков длился процесс познания окружающего мира. Добытые сведения передавались из поколения в поколение и



вот теперь передаются вам. Огромный труд был затрачен учеными, и немалый труд предстоит затратить каждому молодому человеку для того, чтобы усвоить основы современной науки. В наше время без этих знаний не обойтись. Они нужны не только ученому и инженеру, но и рабочему на производстве, трактористу в поле. Ежедневно люди на работе да и дома имеют дело со сложными механизмами. Чтобы понять, как они работают, нужно знать законы природы.

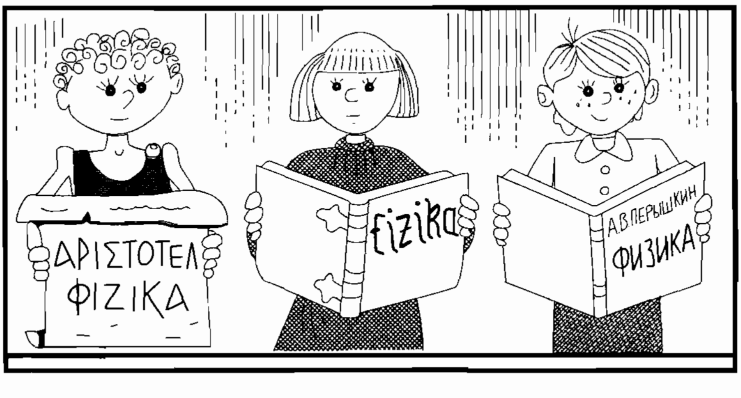
Обучение необходимо не только для развития общества, но и для поддержания его существования.

Преобразование мира

Именно развитие науки о природе дало в руки человека современную технику, и это привело к преобразованию окружающего нас мира. Основную роль сыграла здесь физика — наука, изучающая самые общие законы природы.

Физика служит фундаментом техники. Строительная техника, гидротехника, теплотехника, электротехника и энергетика, радиотехника, светотехника и другие выросли на основе физики. Благодаря сознательному использованию законов физики техника из области случайных находок вышла на широкую дорогу целенаправленного развития.

Познавая спрятанные под покровом бесконечно многообразного мира явлений законы природы, человек научился создавать то, чего никогда не было в природе. Было изобретено радио, построены громадные электрические машины, освобождена внутриатомная энергия. Человек вышел в космическое пространство.



Наука и производство

Наука и практическая деятельность человека чрезвычайно тесно связаны, переплетены друг с другом.

Зарождение науки, как уже говорилось, было обусловлено жизненно важными потребностями человечества. На протяжении всей истории науки запросы практики, техники и технологии являлись важнейшими стимулами ее развития.

Развитие науки, с одной стороны, привело к преобразованию мира, а с другой — именно практическая деятельность человека в самом широком смысле является главным критерием истинности добываемых знаний, их объективности.

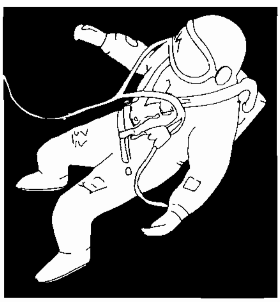
Физика и другие науки

Физика — это наука, занимающаяся изучением самых общих свойств окружающего нас материального мира.

Вследствие этой общности физики нет и не может быть явлений природы, не имеющих физических сторон. Поэтому понятиями физики и ее законами пользуются в любом разделе естествознания, даже если при этом ограничиваются простым описанием предметов и явлений. Ведь при таком описании нельзя обойтись без физических представлений о размерах, длительности, массе, цвете и т. д.

В настоящее время физика глубокими корнями вросла в астрономию, геологию, химию, биологию и другие естественные науки. Она многое объясняет в этих науках, предоставляет им современные методы исследования: радиотелескопы, электронные микроскопы, лазеры, рентгеновские установки и т. д.

Широта и общность содержания приводят физику по наиболее принципиальным положениям в непосредственное соприкосновение с философией. Изучение наиболее важных сторон мира позволяет исследовать вопросы познания природы в отчетливой и общей форме, на которую не влияет сложность обыденных предметов и явлений. На протяжении всего курса вы будете знакомиться с физическими законами и явлениями. Перед вами постепенно предстанет общая картина единства природы.



Велико значение физики как одного из главных факторов, определяющих культурный уровень человека. Этот уровень, образно говоря, можно измерить числом фактов, которые человек способен видеть в кубическом метре Вселенной. С наибольшим числом фактов, относящихся к природе мира, в котором мы живем, знакомит нас именно физика.

§ 3. ЗАРОЖДЕНИЕ И РАЗВИТИЕ СОВРЕМЕННОГО НАУЧНОГО МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ

От мифов к простым фактам

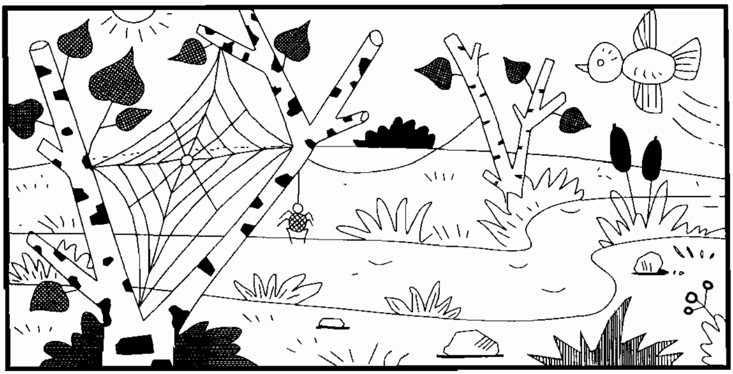
Каким же образом удается разглядеть черты единой картины мира в хаосе разнообразных событий? Как подойти к пониманию того общего, что есть между деревом и камнем, водой и паутиной, протянувшейся над ручьем, полетом птицы и движением планет?

Потребность в познании мира вначале привела к попыткам объяснить весь мир в целом, получить ответы на такие всеобъемлющие вопросы: откуда взялась Вселенная? В чем сущность жизни? Какие принципы управляют всеми событиями в мире?

Дать сразу обоснованные ответы на эти вопросы оказалось невозможным. Люди начали придумывать разнообразные мифы о возникновении мира, появилась религия.

Лишь примерно 500 лет назад человечество вступило на путь научного познания природы, который оказался поразительно плодотворным: люди приступили к экспериментированию с природой. Это было началом науки в той форме, как мы ее знаем сегодня.

Одним из первых плодотворность нового пути осознал великий Леонардо да Винчи (1452—1514). Он писал: «Истолкова-



тель ухищрений природы — опыт; он никого не обманывает; лишь наше суждение само себя иногда обманывает.

Нужно руководствоваться показаниями опыта и разнообразить условия до тех пор, пока мы не извлечем из опыта общих законов, ибо лишь опыт открывает нам общие законы.

Общие законы препятствуют нам вводить в заблуждение самих себя и других, ожидая результатов, получить которые невозможно.

Те, кто, изучая науки, обращается не к природе, а к авторам, не могут считаться сынами природы: я бы сказал, что они только ее внуки. Лишь она одна — подлинная руководительница настоящих гениев; между тем, как это ни глупо, смеются над человеком, предпочитающим учиться у самой природы, а не у авторов, которые не больше как ее ученики».

Сказано превосходно. И все сказанное не утратило смысла до наших дней. Однако Леонардо не опубликовал эти мысли. Стимулом естествознания XVII в. стал призыв к экспериментальному изучению природы со стороны английского философа Фрэнсиса Бэкона (1568—1626). Ф. Бэкон понял важное обстоятельство: **законы природы могут дать неизмеримо больше, чем заключено в том опытном материале, на основе которого они получены. Именно благодаря этому возможна наука.**

Наука в современном понимании, по словам выдающегося физика В. Вейскопфа, возникла тогда, когда вместо попыток получить немедленно ответы на глобальные вопросы люди начали интересоваться простыми, на первый взгляд незначительными фактами. Например, падением камня, нагреванием воды, когда в нее бросают кусок раскаленного железа, и т. д. Но эти факты описывались очень строго, точно, количественно.

Любой человек при желании мог убедиться в их справедливости, проверить их.

Вместо того чтобы задавать общие вопросы и получать частные ответы, ученые начали задавать частные вопросы и получать общие ответы. Этот процесс продолжал развиваться: вопросы, на которые мог быть получен ответ, становились все более общими. «Самый непостижимый факт, — как сказал однажды А. Эйнштейн, — заключается в том, что природа познаваема». В процессе познания законов природы отчетливо проявилась и продолжает проявляться справедливость мысли Бэкона о возможности нахождения общих законов, отправляясь от частных фактов, установленных точными экспериментами.

Сущность научного метода

Ученые давно перестали верить в то, что можно постичь истину, сидя за письменным столом и размышляя о том, как должна быть устроена Вселенная. Около 350 лет назад были окончательно выработаны основы наиболее подходящего физического метода исследования. Он состоит в следующем: **опираясь на опыт, отыскивают количественно (математически) формулируемые законы природы. Открытые законы проверяются практикой.**

Нельзя не удивляться, как, начав с исследования несложных фактов, наука быстро поднялась до современного уровня. За несколько сотен лет ученые пришли к открытию многих фундаментальных законов природы. Начиная с Галилея и Ньютона, ученые перестали считать, что наука должна сводить непривычные, непонятные явления к привычным и понятным с точки зрения здравого смысла. Задачей науки стал поиск математически выражаемых общих законов природы, которые охватывали бы громадную совокупность фактов.

Ученые стали требовать объяснения на основе этих законов привычных нам явлений, которые, казалось бы, не требуют объяснений. Например, почему книга не проваливается сквозь стол? Этим был брошен вызов «здравому смыслу». Вызов, который в таких современных теориях, как теория относительности и квантовая механика, привел к прямому противоречию с обыденным здравым смыслом.

Суть нового направления поиска в науке глубоко, к сожалению, не вошла в плоть и кровь всех людей. В связи с этим очень часто и сейчас возникает множество недоразумений. Понять сущность современного научного мировоззрения и метода нелегко. Переворот, который должен произойти в сознании человека, можно сравнить с переворотом в голове дикаря, который от лечения таким понятным средством, как изгнание злых духов, должен перейти к «таинственным» мерам: кипячению воды, прививкам, соблюдению гигиены и т. д. Изгонять нужно, как выяснилось, не привычных «здравому смыслу» человекоподобных существ, а микробы и вирусы, которые невозможно увидеть простым глазом.

Научное мировоззрение

Фундаментальные законы, устанавливаемые в физике, намного сложнее для восприятия, чем те простые факты, с которых начинается исследование любых явлений. Но они столь же достоверны, столь же объективны, как и наблюдаемые непосредственно простые явления. Эти законы в рамках своих границ применимости не нарушаются никогда, ни при каких условиях.

Все большее число людей осознают, что природа следует определенным законам, которые исключают чудеса. Рост достижений науки в объяснении природы подрывает веру в сверхъестественное.

Плоды научного метода

Можно проследить, как открытие современного метода исследования природы очень быстро привело к резкому расширению возможностей человека.

В течение нескольких столетий население Земли, которое вплоть до эпохи Возрождения (XIV—XV вв.) количественно менялось очень медленно, внезапно возросло с 600 тыс. до 5 млрд. Большие пространства на поверхности Земли изменили свой облик. Материки прорезали шоссейные и железные дороги. На месте лесов выросли огромные города. Путешествие по воздуху с одного материка на другой стало намного быстрее и удобнее, чем путешествие из Петербурга в Москву, совершенное 200 лет назад. Человек высадился на Луне.

Экологические проблемы

Технологическое преобразование мира ставит проблему сохранения и поддержания жизни на нашей планете. Жизнь в любой форме постоянно вынуждена искать компромисс между присущей ей способностью к неограниченному росту и ограничениями, которые возникают при ее взаимодействии с окружающей природной средой. Экологические проблемы являются общими для физиков, химиков, биологов, экономистов, инженеров, писателей и общественных деятелей.

К неблагоприятным экологическим последствиям приводит работа тепловых двигателей и атомная энергетика. В связи с этим на повестку дня ставятся серьезнейшие вопросы. Могут ли атомные электростанции стать безопасными и насколько они необходимы? Решат ли энергетическую проблему термоядерные атомные станции и могут ли они быть созданы?

От падения камня до расширяющейся Вселенной и квантовой механики

Достижения современной науки трудно переоценить. Мы уже довольно достоверно знаем, что было с нашей Вселенной около 15 млрд лет назад. В это время произошел «Великий взрыв» и Вселенная стала расширяться. Это расширение продолжается до сих пор.

Первоначально вещество Вселенной было горячим, но расширение привело к постепенному уменьшению температуры. При температурах порядка нескольких миллиардов градусов начали образовываться атомные ядра из протонов и нейтронов. Когда температура снизилась до нескольких тысяч градусов, ядра получили возможность захватывать электроны: начали образовываться атомы. По мере дальнейшего уменьшения температуры стали образовываться простые молекулы, а затем жидкости и кристаллы. Наконец возникли гигантские цепеобразные молекулы, на основе которых зародилась жизнь.

Величайшим триумфом человеческого разума, рядом с которым трудно поставить достижения человечества как в области других наук, так и в сфере практической деятельности, было создание в 20-х годах XX в. квантовой механики. На основе разрозненных, на первый взгляд противоречащих друг другу экспериментальных фактов, относящихся к макроскопическим явлениям, которые порождаются индивидуальными микроскопическими процессами, удалось создать теорию движения элементарных частиц — теорию процессов, непосредственно не доступных ни нашим органам чувств, ни воображению. Мы лишены возможности представить себе наглядно эти процессы, так как они отличаются от тех макроскопических явлений, которые человечество наблюдало на протяжении сотен тысяч лет и основные законы которых были сформулированы к концу XIX в.

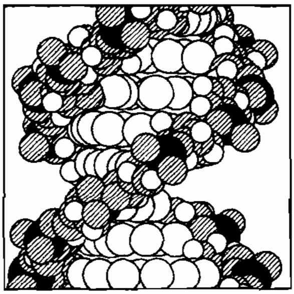
Квантовая механика впервые объяснила устойчивость атома, закономерности образования молекул и позволила в общих чертах понять строение вещества. Она открыла «вероятностный» мир, в котором существуют микроскопические объекты. Эти объекты наделены удивительными противоречивыми свойствами: они могут занимать определенное положение, иметь определенную скорость, но не одновременно! При попытке ограничить движение микрочастицы малой областью пространства ее скорость и энергия неизбежно возрастают.

В последние годы начала проясняться внутренняя структура элементарных частиц. Самое сокровенное в природе постепенно становится доступным человеческому разуму.

Познаваемость мира и самоограничение науки

Теперь мы убеждены, что найденный наукой метод познания мира единственно правильный. Только отказ от немедленного получения исчерпывающей, абсолютной истины, только бесконечный путь сквозь пестроту экспериментальных фактов сделали научные знания столь успешными и глубокими.

Ученые давно поняли, что познание — длительный и трудный процесс. Мир огромен и очень сложен. Многое мы не знаем совсем, о многом лишь начинаем догадываться. Не знаем с достоверностью структуру элементарных частиц и не в состоянии пока понять, чем обусловлены наблюдаемые свойства частиц и сколько типов истинно элементарных частиц существует в мире. Не знаем, что было с Вселенной до «Великого взрыва» и что будет с ней в дальнейшем.



Мы имеем пока лишь основу для описания эволюции Солнечной системы от беспорядочного облака до образования планет и зарождения жизни на Земле. Только недавно ученые приступили к изучению живых организмов на молекулярном уровне. Здесь удалось расшифровать информационный код наследственности, записанный на спиральных молекулах дезоксирибонуклеиновой кислоты (ДНК). Но как на основе этого кода создается живой организм, пока не ясно. Очень мало достоверного известно о природе сознания.

Наука в отличие от мифов и религий не утверждает, что она может немедленно дать ответы на все вопросы. В том числе на самые животрепещущие: о предназначении человека, о судьбе Вселенной и т. д. Но она дает правильное понимание проблемы в целом, правильный подход к ее возможному решению. Основанный на научном методе подход является единственно правильным, так как гарантирует достоверность полученных знаний. Однако это трудный и медленный путь достижения истины.

При изучении физики, так же как и других наук, нельзя сразу, за короткое время усвоить их суть и научиться эти знания применять для решения практических задач или развивать науку дальше. В той или иной мере необходимо знакомство не только с фундаментальными законами, но и с научным методом познания, главными фактами, лежащими в основе современного здания науки.

ОСНОВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ФИЗИЧЕСКОГО МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ

§ 4. ФИЗИКА — ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ НАУКА

Цель физики

Физика занимается изучением явлений, протекающих в природе. Ее цель: **во-первых, отыскать наиболее общие законы природы; во-вторых, объяснить конкретные процессы действием этих общих (фундаментальных) законов.** Наиболее глубоко происходящие процессы можно объяснить на основе определенных представлений о строении различных веществ. **Выявление строения вещества также составляет задачу физики.**

Общих законов природы или фундаментальных физических теорий сравнительно немного, но они охватывают огромную совокупность явлений. К числу таких фундаментальных теорий относятся: классическая механика Ньютона, термодинамика, статистическая механика, электродинамика, квантовая механика и немногие другие.

Открытие общих законов подготавливается в процессе развития науки, накопления новых фактов и совершается людьми, способными глубже проникнуть в суть явлений, чем их современники. В основном же труд физика состоит в поиске новых фактов и в приложении общих принципов к объяснению конкретных явлений. Не следует, однако, думать, что объяснение конкретного процесса на базе известных фундаментальных законов — простая вещь. Например, объяснить явление сверхпроводимости удалось лишь спустя 50 лет после создания квантовой механики — теории, в рамках которой можно это сделать.

Экспериментальный характер физики

Задачи, стоящие перед физикой, определяют особенности физического метода исследования.

При изучении физики уже недостаточно карандаша и бумаги — привычных принадлежностей математика. Требуется большее пространство, чем пространство стола, и бо́льшая поверхность, чем площадь доски. Дело в том, что физика в отличие от математики — экспериментальная наука. Ее законы основаны на фактах, установленных опытным путем. Причем факты остаются, а истолкование их часто меняется в ходе исторического развития науки.

Факты устанавливаются главным образом в результате планомерных наблюдений. Бывают, правда, и случайные открытия, как, например, открытие А. Беккерелем радиоактивного распада урана.

Физические величины и их измерение

Экспериментальный характер физики определяет весь строй этой науки.

Исследование явлений начинается с наблюдения. Но при этом нельзя ограничиваться общим качественным впечатлением от явления. Человек должен выделить и зафиксировать в памяти те общие черты отдельных восприятий, которые повторяются и которые для него практически важны. Это ведет к образованию понятий, являющихся первым шагом на пути познания природы.

Следующий важный шаг в развитии научной мысли состоит в переходе к понятиям, допускающим количественные характеристики в форме числа. Необходимо найти количественные характеристики отдельных сторон явления в виде величин, доступных измерению. Дело это непростое: ведь надо догадаться, какие именно понятия могут служить для количественной характеристики явления.

Для того чтобы описать происходящие события и вскрыть их сущность, ученые вводят целый ряд строго определенных количественных понятий — физических величин: скорость, сила, давление, температура, электрический заряд и т. д. Каждой величине надо дать точное определение, в котором указать, как эту величину можно измерить, как провести необходимый для этого измерения опыт, чтобы получить ее количественное значение. В физике чисто словесного определения величины недостаточно. При определении математических величин мы не встречаем чего-либо подобного.

Можно смело утверждать, что какая-либо область физического знания вообще становится наукой лишь с того момента, когда мы вводим в нее измерения. Только благодаря возможности получать количественные значения физических величин мы можем точно предсказать наступление определенных событий. Например, если бы мы не умели измерять температуру, то никогда не смогли бы дать точный ответ на вопрос: когда закипит вода? Умея же измерять температуру, такой ответ можно дать без труда: вода закипит при температуре 100 °C. Следя за изменением температуры воды, мы можем предсказать момент закипания воды.

Обычно при определении физических величин просто уточняют и придают количественную форму тому, что непосредственно воспринимается нашими органами чувств. Так вводят понятия силы, температуры и т. д. Но есть, конечно, величины, которые не воспринимаются нашими органами чувств, например электрический заряд. Но они могут быть выражены через другие величины, на которые органы чувств человека реагируют. Так, значение электрического заряда определяется по силам взаимодействия между заряженными телами.

Связи между физическими величинами

Чтобы из наблюдений над явлениями сделать общие выводы, найти причины явлений, надо установить количественные зависимости между различными величинами. Если такая зависимость найдена, то мы говорим, что открыт физический закон. Установление зависимостей между физическими величинами избавляет нас от необходимости делать в каждом отдельном случае опыт. С помощью несложных вычислений можно найти ответ на любой интересующий нас вопрос в данной области явлений.

Для установления зависимостей между физическими величинами необходимо от непосредственного наблюдения перейти к физическому эксперименту, при этом следует специально фиксировать условия, в которых протекает процесс.

Если меняются все условия сразу, то трудно уловить какие-либо определенные закономерности. Поэтому, проводя физический эксперимент, стремятся проследить зависимость одной величины от характера изменения каждого из условий по отдельности. Например, давление газа зависит от его массы, объема и температуры. Чтобы исследовать эту зависимость, надо сначала изучить, как влияет на давление изменение объема, когда температура и масса остаются неизменными. Затем проследить, как давление зависит от температуры при постоянных объеме и массе и т. д.

Теория

Изучая экспериментально количественные связи между отдельными величинами, можно выявить некоторые частные закономерности. На их основе создают теорию явлений, которая объединяет в одно целое отдельные законы. Теория, таким образом, находится в таком же отношении к отдельным законам, в каком законы относятся к отдельным явлениям. Она призвана объяснить частные закономерности с общей точки зрения.

Основные физические теории не могут быть построены чисто логически. Фундаментальные связи могут быть установлены только на основе эксперимента. Однако теория — это не простое объединение нескольких опытных закономерностей. Она является результатом творческой работы, размышления и воображения. Данные опытов неизбежно разрозненны. Многие важные детали могут быть упущены. Создавая теорию, ученый должен воссоздать цельную картину явлений.

Значение законов природы состоит в том, что они могут дать гораздо больше информации, чем опытные факты, с помощью которых эти законы получены. Если бы это было не так, то вместо современной науки мы имели бы разрозненные сведения о происходящих в природе процессах, но ничего не могли бы предсказать.

Теория позволяет не только объяснить уже наблюдавшиеся явления, но и предсказывать новые. Так, Д. И. Менделеев на основе открытого им периодического закона предсказал существование нескольких химических элементов, которые в то время не были известны. Английский физик Дж. Максвелл предсказал существование электромагнитных волн.

С развитием и углублением теории появляется возможность дать истолкование многих понятий, введенных в начале исследования. Например, только с появлением молекулярно-кинетической теории был вскрыт физический смысл температуры как средней меры интенсивности хаотического движения молекул.

В заключение подчеркнем, что справедливость физической теории доказывается тем, что вся совокупность следствий из нее согласуется с опытными фактами. Логическая непротиворечивость теории необходима, но не является достаточной для справедливости теории, как в математике. Можно построить логически безупречную теорию, которая не будет иметь никакого смысла, если не будет соответствовать фактам.

§ 5. ПРИБЛИЖЕННЫЙ ХАРАКТЕР ФИЗИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ

Необходимость упрощения реальных явлений

Не следует думать, что только фундаментальные теории базируются на фактах, а конкретные явления можно объяснить на основе этих теорий без обращения к эксперименту. Сейчас мы в этом убедимся.

Любое явление, любой процесс, свойства любого конкретного тела бесконечно сложны, поэтому, приступая к исследованию физического явления, мы должны выделить то главное, от чего это явление зависит существенным образом, и отбросить второстепенные обстоятельства, которые в рассматриваемом явлении не играют существенной роли. Без такого упрощения исследование физических явлений немыслимо. Самые простые явления приводили бы к сложным, неразрешимым теоретически задачам.

Например, падение камня принадлежит к числу простых явлений. Главный фактор здесь — притяжение к Земле. Но имеется еще целый ряд обстоятельств, влияющих на падение камня: сопротивление воздуха, вращение Земли, ее форма (Земля сплюснута у полюсов), притяжение к окружающим телам, к планетам и т. д. Все эти влияния действительно есть, но почти всеми ими можно (и даже нужно) пренебречь. Иначе задачу о падении камня вообще невозможно было бы решить.

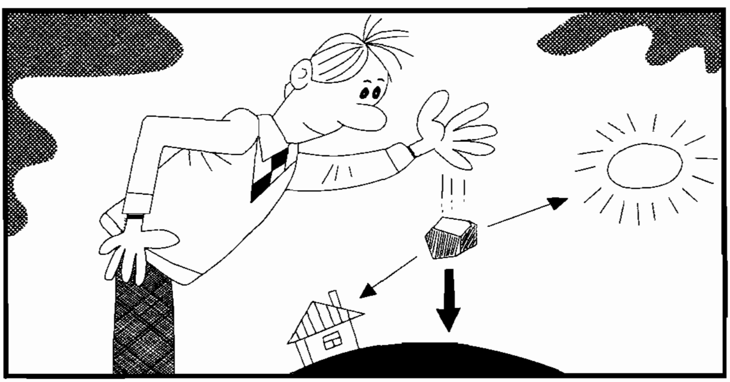
В данном случае все просто и основной фактор можно выделить сразу. Но так обстоит дело далеко не всегда. Попробуйте ответить на вопрос: что в основном определяет подъемную силу крыла птицы или самолета?

Упрощенная модель явления

Подчеркнем одно коренное отличие физического метода исследования от математического.

В математике при образовании основных понятий раз и навсегда отвлекаются от качественного своеобразия объектов, выделяя существенные для математики количественные отношения, и далее имеют дело с логическими следствиями первоначальных положений. Например, в геометрии раз и навсегда вводится понятие точки, и затем с ним оперируют, не заботясь о том, существуют ли точки в природе.

В физике при анализе каждого нового явления нужно уметь каждый раз выделять существенное в нем и, следовательно, определенная идеализация, упрощение реальных обстоятельств всегда должны иметь место. Например, в физике тоже вводится понятие материальной точки как тела, обладающего массой, но не имеющего размеров. Однако в физике это понятие всегда рассматривается как некоторое приближение к действительности, которое справедливо только при определенных услови-



ях. Каждый раз нужно выяснять, выполняются эти условия или нет. Так, при рассмотрении притяжения планет к Солнцу размеры планет и Солнца намного меньше расстояний между ними. Поэтому и планеты и Солнце можно считать материальными точками. Такое упрощение позволяет сравнительно легко установить характер движения планет.

Но если расстояния между взаимодействующими телами не очень велики по сравнению с их размерами, то считать их материальными точками уже нельзя. Например, движение искусственных спутников и даже Луны заметно зависит от размеров и формы Земли.

Итак, при рассмотрении явлений нужно прежде всего определить, какой упрощенной моделью можно заменить происходящее в действительности сложное явление.

Объяснение конкретных явлений невозможно без опоры на эксперимент

Теперь вернемся к роли эксперимента в объяснении конкретных физических явлений.

Мы не можем чисто теоретически установить, пригодна ли данная упрощенная модель для описания конкретного явления. Чтобы теоретически оценить влияние различных факторов на явление, нужно сначала все их учесть, а потом сравнить их роль. Но это немыслимо из-за громадной сложности и многообразия влияний, определяющих реальный процесс.

Только опыт дает нам уверенность в правильности той или иной модели явления. Правда, далеко не всегда нужны специальные опыты. Часто можно опираться на сведения, взятые из уже известных экспериментов, не имеющих непосредственного отношения к рассматриваемой задаче.

От чего зависит выбор упрощенной модели явления?

Для понимания сущности физического метода исследования важно еще одно обстоятельство. Выбор той или иной упрощенной модели определяется не только свойствами самого исследуемого объекта, но зависит также от характера процессов, которые мы намерены изучать. Приведем два примера.

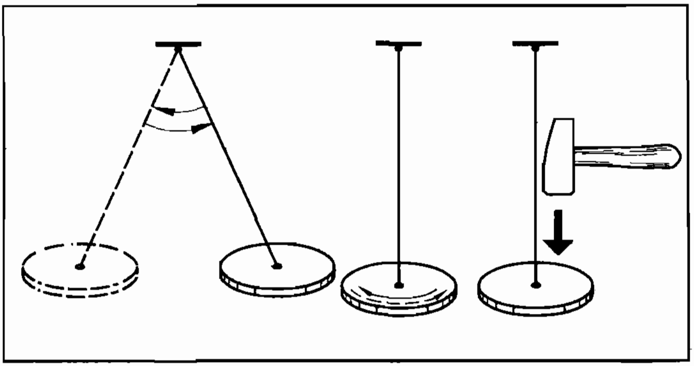
П р и м е р 1. Пусть исследуемым объектом будет металлический диск, подвешенный на упругой проволоке, длина которой намного больше размеров диска. Если нас интересует вопрос о периоде линейных колебаний диска (период — время, в течение которого диск возвращается в исходное положение после того, как проволока отклонена в вертикальной плоскости на некоторый угол), то можно не учитывать распределение массы в диске и считать его точкой. Период колебаний определяется только длиной проволоки и ускорением, сообщаемым Землей всем телам у ее поверхности. Распределение масс и упругие свойства диска тоже влияют на период, но это влияние мало и им можно пренебречь.

Изучая крутильные колебания диска (колебания вокруг проволоки как оси), мы уже не имеем права пренебрегать распределением масс, так как именно оно определяет значение периода. Но здесь можно не учитывать малые деформации диска (а они обязательно есть) и рассматривать диск как абсолютно твердое тело.

Теперь ударим по диску молоточком. Он зазвенит, так как в нем возникнут упругие колебания. При изучении этих колебаний мы уже не можем считать диск абсолютно твердым.

Итак, от характера изучаемого явления зависит, какие свойства диска необходимо учитывать, а какими можно пренебречь.

П р и м е р 2. Если нас интересуют только механические и тепловые свойства разреженного газа, то приблизительно объяснить эти свойства можно, рассматривая молекулы газа как маленькие упругие шарики, движущиеся хаотически, сталкивающиеся друг с другом и со стенками сосуда. Давление на стенки сосуда как раз и обусловлено этими соударениями. Мы можем даже экспериментально осуществить эту модель газа. Горошины могут моделировать молекулы, а их хаотическое движение можно возбудить с помощью колеблющихся стенок сосуда. Но оптические свойства газа такая модель объяснить совершенно не в состоянии.



§ 6. ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ФИЗИКИ

Изучение физики в школе

Необходимость знания основ физики всеми, а также особенности физики как науки заставляют строить обучение физике не так, как это делается при изучении математики и других наук.

Уже несколько лет вы изучали физику и многое, надо надеяться, поняли в строении окружающего мира. Вы познакомились со строением вещества, механикой, тепловыми и электромагнитными явлениями, строением атома. Можно было бы ожидать, что в старших классах вас познакомят с чем-то совершенно новым. Но это не так! Лишь волновая оптика, теория относительности и ядерная физика появятся впервые, а в основном вы будете изучать ту же механику, ту же молекулярную физику, электродинамику и т. д. Точно так же происходит обучение физике во всех странах мира. Те из вас, кто будет учиться дальше в вузах, опять начнут изучать физику с самого начала, с механики, уже по третьему разу.

Объяснить в нескольких фразах, почему так приходится делать, довольно трудно. Вы сами почувствуете это в дальнейшем. Причин здесь немало. Остановимся на главных.

Взаимосвязь процессов в природе

Физика изучает конкретные явления. Каждое явление связано бесчисленными, часто неочевидными нитями со всеми другими явлениями. Поэтому, объясняя какое-либо событие, мы не можем не затронуть окружающий мир. Этот мир един. В нем нет ни чисто механических, ни чисто тепловых или электромагнитных явлений. Чтобы приблизиться к пониманию мира, мы расчленяем единое целое и изучаем его части. Это необходимо, ибо нельзя надеяться объяснить сразу все многообразие мира.

Вот два примера взаимосвязи процессов. Механическое движение почти всегда сопровождается тепловыми явлениями. Тела при движении в воздухе, даже очень разреженном, нагреваются и могут вообще сгореть, если скорость движения велика. Это происходит с метеоритами в атмосфере Земли и происходило бы с космическими кораблями, возвращающимися на Землю, если бы не принимались меры к их постепенному торможению.

Строение вещества, тепловые, оптические и многие другие процессы в телах обусловлены взаимодействиями между электрически заряженными частицами, из которых построены атомы. Поэтому, не зная законов электромагнитных взаимодействий, нельзя как следует понять ни строение вещества, ни перечисленные процессы.

Приходится вначале знакомиться с очень грубыми моделями реальных явлений, когда внутренние связи между процессами различной природы непосредственно не выступают. В результате получается очень упрощенная схема явления, которая нуждается в дальнейших уточнениях. Это и делается при повторном изучении физики в вузах.

Примерно таким же путем развивается и сама наука. Постепенно уточняются значение и роль различных процессов в природе, с тем чтобы в конце концов приблизиться к пониманию мира как единого целого.

Физика и математика

Важно еще одно обстоятельство. Физика — наука экспериментальная, но в то же время и наука количественная. **Все основные законы физики формулируются на математическом языке.** И этот язык надо знать, а он не прост.

§ 7. ПОЗНАВАЕМОСТЬ МИРА

Цепочка вопросов и ответов

Благодаря открытиям ученых многих стран на протяжении нескольких веков мы узнали очень много о закономерностях окружающего нас мира. Настолько много, что полученную информацию уже не может охватить индивидуальный человеческий мозг. Но мы знаем далеко не все, быть может, не знаем самого главного.

Попытки разобраться в самом простом и обыденном явлении быстро заведут нас весьма далеко. Настолько далеко, насколько в настоящее время продвинулась наука. Вот пример цепочки вопросов, которые можно задавать по любому поводу, и ответов.

Почему книга не проваливается сквозь стол? Потому что стол не дает ей падать. А почему не дает? Потому что стол немного прогибается под действием книги и при этом возникает сила упругости, которая и мешает книге падать, несмотря на притяжение к Земле. Почему возникает сила упругости? Потому что расстояния между атомами стола при его изгибе меняются и из-за этого возникает дополнительная сила, действующая между заряженными частицами соседних атомов. А почему электроны притягиваются к положительно заряженному ядру, но не падают на него? Почему существуют атомы? А потому, что есть такой закон природы (закон квантовой механики): чем меньше область пространства, в которой заключена частица, тем быстрее она должна двигаться. Это мешает электрону упасть на ядро, размеры которого примерно в десять тысяч раз меньше размеров атома. Но почему такой закон существует? Вот этого не знает уже никто на земном шаре. Опыт говорит, что такой закон есть, и это пока все!

Познаваемость мира

В одном мы можем быть уверены: найденный человечеством путь познания природы является правильным.

На пути теоретических обобщений, опирающихся на показания самой природы, наука достигла поразительных результатов и, главное, создала уверенность в неограниченной познаваемости мира — мира движущейся, изменяющейся, бесконечно разнообразной материи.

МЕХАНИКА

§ 1. ЧТО ТАКОЕ МЕХАНИКА?

Выделим среди великого множества процессов, происходящих в природе, круг явлений, которые изучает механика.

Первое, что бросается в глаза при наблюдении окружающего нас мира, — это его изменчивость. Мир не является застывшим, статичным. Изменения в нем весьма разнообразны. Но если спросить вас, какие изменения вы замечаете чаще всего, то ответ, пожалуй, будет однозначным: **меняется положение предметов** (или тел, как говорят физики) **относительно земли и относительно друг друга с течением времени.** Бежит ли собака или мчится автомобиль — с ними происходит один и тот же процесс: их положение относительно земли меняется с течением времени. Они перемещаются. То же самое происходит с листьями деревьев в ветреную погоду, с падающими каплями дождя, с плывущими в небе облаками.

Конечно, не любые изменения состоят в перемещении тел. Так, например, при охлаждении вода замерзает, превращается в лед. Но наиболее часто встречающиеся вокруг нас изменения — это изменения положения тел относительно друг друга.

Изменение положения тела в пространстве относительно других тел с течением времени называется механическим движением.

Определение механического движения выглядит просто, но простота эта обманчива. Прочтите определение еще раз и подумайте, все ли слова вам ясны: «пространство», «время», «относительно других тел». Скорее всего, эти слова требуют пояснения.

Пространство и время

Пространство и время — наиболее общие понятия физики и... наименее ясные. Исчерпывающих сведений о пространстве и времени мы не имеем. Но и те результаты, которые получены сегодня, изложить в самом начале изучения физики невозможно.

На первых порах нам вполне достаточно уметь измерять расстояние между двумя точками пространства с помощью линейки и интервалы времени с помощью часов. Линейка и часы — важнейшие приспособления для измерений в механике, да и в быту. С расстояниями и интервалами времени приходится иметь дело при изучении всех школьных предметов (проверьте!).

«...относительно других тел»

Если эта часть определения механического движения ускользнула от вашего внимания, то вы рискуете не понять самого главного. Вот пример. В купе вагона на столике лежит яблоко. Попросим двух наблюдателей (пассажира и провожающего) ответить во время отправления поезда на вопрос: движется ли яблоко?

Наблюдатели оценивают положение яблока каждый по отношению к себе. Пассажир видит, что яблоко от него на расстоянии 1 м и расстояние это сохраняется с течением времени. Провожающий на перроне видит, как с течением времени расстояние от него до яблока растет.

Пассажир: «Яблоко не совершает механического движения, оно неподвижно».

Провожающий: «Яблоко движется».

Итак, одно и то же тело одновременно и движется и не движется. Возможно ли такое? Согласно определению механического движения именно так и есть.

Законы природы и юридические законы

Любые изменения в природе подчиняются определенным законам. Движение тел описывается з а к о н а м и м е х а н и к и. Различие законов природы и юридических законов состоит прежде всего в том, что законы природы не изобретаются людьми, а открываются в процессе исследования окружающего мира. Если юридические законы могут быть нарушены или отменены, то нарушить или отменить законы природы не может никто!

Механика — наука об общих законах движения тел. Механическим движением называется перемещение тел в пространстве относительно друг друга с течением времени.

§ 2. КЛАССИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА НЬЮТОНА И ГРАНИЦЫ ЕЕ ПРИМЕНИМОСТИ

Как и все законы физики, законы механики не абсолютно точны.

Законы механики были сформулированы великим английским ученым Исааком Ньютоном. На могильной плите в Вестминстерском аббатстве в Лондоне высечены знаменательные слова:

Здесь покоится
Сэр Исаак Ньютон,
Который почти божественной силой своего ума
Впервые объяснил
С помощью своего математического метода
Движения и формы планет,
Пути комет, приливы и отливы океана.
Он первый исследовал разнообразие световых лучей
И проистекающие отсюда особенности цветов,
Которых до того времени никто даже не подозревал.
Прилежный, проницательный и верный истолкователь
Природы, древностей и священного писания.
Он прославил — в своем учении всемогущего Творца.
Требуемую Евангелием простоту он доказал своей жизнью.
Пусть смертные радуются, что в их среде
Жило такое украшение человеческого рода.
Родился 25 декабря 1642 г.
Умер 20 марта 1727 г.

Исаак Ньютон (1642—1727) — гениальный английский физик и математик, один из величайших ученых в истории человечества. Ньютон сформулировал основные законы и понятия механики и открыл закон всемирного тяготения. Он разработал также теорию движения небесных тел и впервые объяснил происхождение приливов и отливов в океане. В оптике Ньютон открыл явление разложения белого света на цвета, объяснил происхождение цветов и др.
Разработав метод математического исследования природы, Ньютон повлиял на все последующее развитие физики.

На протяжении многих лет ученые были уверены, что единственными основными (фундаментальными) законами природы являются законы механики Ньютона. Все богатство и многообразие мира считали результатом различий в движении первичных частиц, слагающих все тела Вселенной. Однако простая механическая картина мира оказалась несостоятельной. При исследовании электромагнитных явлений было доказано, что они не подчиняются законам Ньютона. Другой великий английский физик Джеймс Клерк Максвелл открыл новый тип фундаментальных законов. Это законы поведения электромагнитного поля, не сводимые к законам Ньютона.

Было выяснено также, что законы Ньютона, как и любые другие законы природы, не являются абсолютно точными. Они хорошо описывают движение больших тел, если их скорость мала по сравнению со скоростью света в вакууме.

Механика, основанная на законах Ньютона, называется классической механикой.

Для микроскопических частиц справедливы, как правило, законы квантовой механики. При движениях со скоростями, близкими к скорости света, тела обнаруживают свойства, о существовании которых Ньютон не подозревал.

Окружающие нас тела достаточно велики и движутся сравнительно медленно. Поэтому их движение подчиняется законам Ньютона. Таким образом, область применения классической механики очень обширна. И в этой области человечество всегда будет пользоваться для описания движения тел законами Ньютона.

КИНЕМАТИКА

Глава 1

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КИНЕМАТИКИ

§ 1.1. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА И ТОЧКИ

Приступим к изучению механического движения. В любом деле первый и главный вопрос: с чего начать? Не думайте, что ответ на этот вопрос при изучении движения оказался простым. Человечеству понадобилось около двух тысяч лет, чтобы встать на верный путь, который завершился открытием законов движения.

Попытки древних философов объяснить причины движения, в том числе и механического, были плодом чистой фантазии. Подобно тому, рассуждали они, как утомленный путник ускоряет шаги по мере приближения к дому, падающий камень начинает двигаться все быстрее и быстрее, приближаясь к матери-Земле. Движения живых организмов, например кошки, казались в те времена гораздо более простыми и понятными, чем падение камня. Были, правда, и гениальные озарения. Так, греческий философ Анаксагор говорил, что Луна, если бы не двигалась, упала бы на Землю, как падает камень из пращи.

Однако подлинное развитие науки о механическом движении в современном смысле слова началось с трудов великого итальянского физика Галилео Галилея. Галилей первым понял, что для открытия законов движения нужно сначала научиться описывать движение количественно (математически).

Нельзя ограничиваться простым наблюдением за движущимися телами; нужно ставить опыты для того, чтобы выяснить, по каким именно правилам происходит движение.

Раздел механики, изучающий способы описания движений и связь между величинами, характеризующими эти движения, называют кинематикой.

Описать движение тела — это значит указать способ определения его положения в пространстве в любой момент времени. Уже на первый взгляд задача описания кажется очень сложной. В самом деле, взгляните на клубящиеся облака, колышущуюся ветку дерева, представьте себе, какое сложное движение совершают поршни автомобиля, мчащегося по шоссе. Как же приступить к описанию движения? Самое простое (а начинать всегда лучше с простого) — это научиться описывать движение точки. Под точкой можно понимать, например, маленькую отметку, нанесенную на движущийся предмет — футбольный мяч (рис. 1.1), колесо трактора и т. д. Если мы будем знать, как происходит движение каждой точки (каждого очень маленького участка) тела, то тем самым мы будем знать, как движется все тело.

Но вначале не надо гнаться за особо точным описанием движения. Давайте примем за точку очень маленький предмет — маленький по сравнению с тем расстоянием, которое он проходит. Например, когда вы говорите, что пробежали на лыжах 10 км, то никто не станет уточнять, какая именно часть вашего тела преодолела расстояние именно в 10 км, хотя вы отнюдь не точка. В данном случае это не имеет сколько-нибудь существенного значения.

Это очень важный момент. Когда мы пытаемся описать события, происходящие в мире, то всегда приходится прибегать к разного рода упрощениям действительности. Иначе мы вообще не сдвинемся с места в решении поставленной задачи. Не имеет смысла претендовать на абсолютную точность описания. Во-первых, она практически не нужна, а во-вторых, все равно она недостижима во всей полноте.

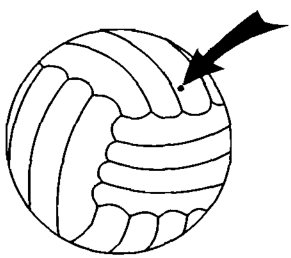


Рис. 1.1

Но и движение маленького тела может быть очень сложным и запутанным. Так, пчела за день совершает столь сложное движение, что за количественное его описание вряд ли кто-либо смог бы взяться. Самое простое движение — это движение по прямой в одном направлении. Его совершает автомобиль на прямолинейном участке шоссе или поезд на прямом участке железнодорожного полотна. Вот с прямолинейного движения точки мы и начнем.

Изучение движения начинаем с его описания. Простейшее движение — это движение точки по прямой.

§ 1.2. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ. КООРДИНАТЫ. СИСТЕМА ОТСЧЕТА

Выясним, что нужно для описания движения точки.

Координаты

Механическое движение состоит в изменении положения тела в пространстве с течением времени. В случае *прямолинейного* движения точка (обозначим ее буквой A) во все моменты времени остается на одной прямой. Для определенности будем считать, что прямая изображает шоссе, а точка A — автомобиль.

Описать движение автомобиля — это значит определить его положение на шоссе в любой момент времени[1].

Сделать это можно различными способами.

Предварительно необходим простой, но важный шаг. На прямой (шоссе) мы должны выбрать начало отсчета расстояний. Указать положение автомобиля на шоссе — значит указать его расстояние от точки, принимаемой за начало отсчета расстояний. Точку эту можно выбирать произвольно, но выбирать ее надо обязательно. Например, за начало отсчета расстояний можно принять один из километровых столбов.

---

[1] Если вам все же не нравится, что автомобиль рассматривается как точка, то с тем же успехом можете считать точкой A метку, поставленную на кузове машины. Тогда нарисованная прямая — это линия, вдоль которой движется метка. В данном случае совершенно безразлично, на каком месте кузова поставить метку. Все метки будут перемещаться одинаково вдоль параллельных прямых.

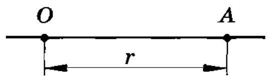


Рис. 1.2

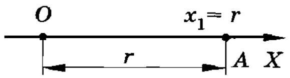


Рис. 1.3

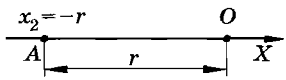


Рис. 1.4

Выберем точку начала отсчета расстояний и обозначим ее буквой O (рис. 1.2). Расстояние OA от начала отсчета до движущейся точки обозначим буквой r. Но это расстояние еще не определяет положения точки A на прямой однозначно. Допустим, что $r = 550$ м. Такое расстояние можно отсчитать как вправо от точки O, так и влево. Поэтому характеризовать положение точки A просто длиной отрезка OA нельзя. Нужно еще знать, справа или слева от начала отсчета расположена точка A. Вы уже догадались, что следует воспользоваться осью координат (это понятие вам хорошо известно из курса математики), т. е. выбрать на прямой положительное направление, отметив его стрелкой. Тогда положение тела можно охарактеризовать одной координатой — числом, принимающим как положительные, так и отрицательные значения.

Точки A (рис. 1.3 и 1.4), находящиеся на одинаковых расстояниях r от начала координат, имеют координаты $x_1 = r$ (см. рис. 1.3) и $x_2 = -r$ (см. рис. 1.4). Расстояние точки от начала координат равно модулю ее координаты: $r = |x|$. Если за начало отсчета принять километровый столб (рис. 1.5), то при выбранном положительном направлении оси X координата автомобиля будет положительной, а координата дерева — отрицательной.

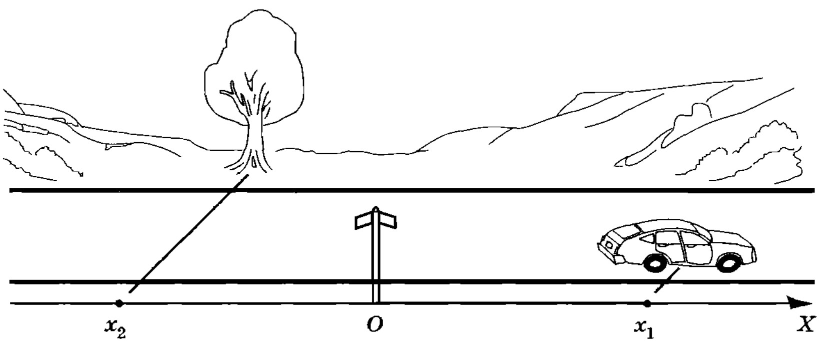


Рис. 1.5

Расстояние OA измеряется одним из обычных способов, например с помощью рулетки. Никаких особых трудностей при измерении расстояния на шоссе нет. Вот измерение огромных расстояний до планет Солнечной системы и особенно до звезд — задача сложная. Решением ее занимается астрономия. Трудно измерять и очень малые расстояния, такие, как расстояния между атомами твердого тела.

Если бы точка A покоилась, то задача по определению ее положения решалась просто: надо измерить координату точки A. Ведь координата покоящегося тела не меняется со временем. Другое дело, когда точка A движется. Теперь ее координата x в разные моменты времени различна, т. е. зависит от времени. Найти эту зависимость — значит ответить на вопрос, каковы координаты точки в любые моменты времени. Или, наоборот, в какие моменты времени точка A будет иметь указанные координаты. Определение моментов времени сейчас не является сложной задачей, если не требуется очень высокая точность.

Правда, не очень просто фиксировать момент, когда тело оказывается в данном месте. Так, на спортивных соревнованиях (бег, горные лыжи, коньки) для определения времени финиша с точностью до сотых и даже тысячных долей секунды применяются сложные электронные устройства. Но мы будем считать, что в каждом случае можно одновременно фиксировать положение точки и показания часов с достаточной точностью.

Система отсчета

Во всех случаях можно говорить лишь о движении одного тела относительно другого (например, о движении автомобиля относительно земли)[1].

Тело, относительно которого рассматривается движение, называется телом отсчета.

С телом отсчета обычно связывают систему координат. В случае прямолинейного движения достаточно одной координатной оси. С помощью системы координат определяют положение тела. Кроме того, необходимы часы, так как движение происходит во времени.

---

[1] Подробно вопросы, связанные с относительностью движения, мы рассмотрим в конце главы.

Тело отсчета, связанная с ним система координат (или координатная ось) и часы образуют систему отсчета.

Для описания прямолинейного движения нужно выбрать систему отсчета: тело отсчета, координатную ось и часы.

? Можно ли автомобиль считать точкой при его движении по выпуклому мосту?

§ 1.3. РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ. ТРАЕКТОРИЯ

Есть различные способы описания движения. Познакомимся с ними.

Описание с помощью таблиц

Один из простых способов количественного описания прямолинейного движения точки рассмотрим на следующем примере. Будем определять положения автомобиля на шоссе через равные интервалы времени, например через каждую минуту. За начальный момент времени можно принять показания часов, когда мы определяем положение тела в первый раз. Выбор начала отсчета времени произволен. Если отсчет времени производится с помощью секундомера, то целесообразно включить его в момент начала движения тела ($t_0 = 0$).

Результаты измерений положения автомобиля в соответствующие моменты времени занесем в таблицу 1.

Таблица 1

t, мин	x, м	t, мин	x, м
0	0	7	2130
1	320	8	2250
2	1050	9	3130
3	1840	10	4130
4	2130	11	5130
5	2130	12	6130
6	2130		

В начальный момент времени автомобиль находится в начале отсчета. За первую минуту он прошел 320 м; за вторую значительно больше — 730 м; за третью еще больше — 790 м, но за четвертую минуту уже меньше — всего 290 м. Далее он, очевидно, стоял (возможно, перед светофором), а затем по прошествии более семи минут после начала движения вновь пришел в движение. Начиная с девятой минуты автомобиль проходил по 1000 м в минуту.

Конечно, это не очень детальное описание движения. Для более детального описания движения надо было бы определять положения автомобиля через меньшие интервалы времени: полминуты, секунду, десятую долю секунды и т. д. Важно лишь понять, что в принципе таким способом можно описать движение сколь угодно детально, выбрав очень малые интервалы времени.

Графический способ

Перейдем теперь к другому, графическому способу описания движения. Графическое описание движения удобно, так как очень наглядно. Будем откладывать вдоль горизонтальной оси моменты времени, а вдоль вертикальной — соответствующие значения координат. Соединив точки, каждая из которых соответствует координате в определенный момент времени, получим график изменения координаты со временем (рис. 1.6). Из него видно, что расстояние от начала отсчета до автомобиля сначала увеличивается медленно, затем быстрее, а потом опять медленнее (торможение машины). Далее на протяжении нескольких минут расстояние остается неизменным и затем снова начинает расти. Конец графика представляет собой отрезок прямой.

График на рисунке 1.6 содержит те же сведения о движении, что и таблица 1.

Предостережем от очень наивной, но часто встречающейся ошибки. График показывает, как меняется координата автомобиля с течением времени. Получается, как видите, довольно сложная кривая. Но это ни в коей мере не означает, что само тело движется вдоль этой кривой. Движение-то является прямолинейным! **Линия, вдоль которой происходит движение точки, называется траекторией.** В рассмотренном случае траектория движения точки — прямая линия.

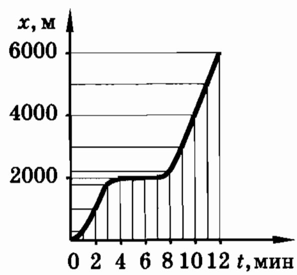


Рис 1.6

Координата как функция времени

Остановимся еще на одном способе описания движения, называемом аналитическим. В каждый момент времени t координата x имеет определенное значение. С течением времени происходит изменение координаты. Говоря математическим языком, это означает, что координата является функцией времени:

$$x = f(t), \text{ или } x = x(t).$$

Вид этой функции в каждом конкретном случае будет вполне определенным. Функция, описывающая движение, изображенное графически на рисунке 1.6, столь сложна, что мы не будем пытаться записать ее в виде определенной формулы.

Зависимость координаты от времени дает полное кинематическое описание движения точки вдоль оси X. В дальнейшем мы увидим, как законы механики позволяют найти вид этой функции, и познакомимся с тем, что нужно для этого знать.

В нашем распоряжении три способа описания движения: табличный, графический и наиболее полный — аналитический, выражающий функциональную зависимость координаты от времени.

§ 1.4. РАВНОМЕРНОЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ. СКОРОСТЬ

Самое простое движение — это равномерное движение по прямой. Для этого движения проще всего определить, что такое скорость.

Движение называется равномерным прямолинейным, если траектория есть прямая линия и точка за любые равные промежутки времени проходит равные расстояния.

Обратите внимание на слова «любые равные», относящиеся к промежуткам времени. Если точка за каждую минуту проходит по 1 м, то это еще не означает, что ее движение обязательно равномерное. Может быть и так, что за первую половину минуты точка проходит 20 см, за вторую половину минуты — 80 см, а в следующие интервалы времени по половине минуты она может пройти 60 и 40 см соответственно и т. д., т. е. движение является неравномерным. Для равномерного движения в данном случае необходимо, чтобы за $\frac{1}{2}$ мин было пройдено $\frac{1}{2}$ м, за $\frac{1}{4}$ мин — $\frac{1}{4}$ м, за $\frac{1}{10}$ мин — $\frac{1}{10}$ м и т. д., т. е. за любые равные промежутки времени точка проходила равные расстояния.

Если мы знаем только, что автомобиль в данный момент времени находится в определенном месте на шоссе, то мы еще ничего не знаем о том, как он движется. Важной величиной, характеризующей движение тела, является его с к о р о с т ь. Со скоростью (быстротой движения тела) мы знакомы из повседневной жизни.

Черепаха перемещается с малой скоростью — примерно 0,5 км/ч, ее движение — символ медлительности (черепаший шаг). Человек перемещается быстрее: его скорость около 5 км/ч. Автомобиль движется быстрее человека (100 км/ч), а самолет еще быстрее (1000 км/ч). Самой большой скорости относительно Земли человек достигает с помощью космических ракет (около 11 км/с). Максимально возможная скорость — это скорость света в вакууме: 300 000 км/с.

Чем больше скорость, тем большее расстояние проходит тело за данный интервал времени. *Скорость показывает, как быстро движется тело, т. е. как быстро с течением времени меняется его положение в пространстве по отношению к другим телам.*

Несмотря на то что слово «скорость» давно стало для нас привычным, определить строго, что же такое скорость для произвольного движения, не так-то просто. Мы начнем с простого случая.

По-прежнему вначале будем считать, что точка (автомобиль на шоссе) движется прямолинейно. Пусть в момент времени t_1 точка имела координату x_1, а в момент времени t_2 ее координата стала равной x_2.

За интервал (или промежуток) времени $t_2 - t_1$ изменение координаты точки равно $x_2 - x_1$ (изменением любой величины, координаты в том числе, называют разность между значениями величины в конце и начале процесса изменения). Для интервала времени принято сокращенное обозначение Δt[1]:

$$\Delta t = t_2 - t_1,$$

[1] Значок Δ (греческая буква «дельта») обозначает в формулах изменение, приращение, промежуток, интервал, отрезок. Соответственно Δt (читается: «дельта тэ») означает не произведение двух величин Δ и t, а промежуток времени.

для изменения координаты — Δx (рис. 1.7):

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

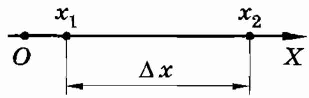


Рис. 1.7

При равномерном прямолинейном движении координаты движущейся точки изменяются одинаково за любые равные промежутки времени.

Скоростью равномерного прямолинейного движения называется отношение изменения координаты тела (точки) Δx к промежутку времени Δt, за который это изменение координаты произошло[1].

Обозначим скорость через v_x. Тогда по определению имеем:

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \qquad (1.4.1)$$

Индекс x около буквы v указывает, что рассматривается скорость точки вдоль оси X.

Скорость равномерного прямолинейного движения постоянна:

$$v_x = \text{const}^2.$$

В самом деле, за любые равные интервалы времени изменения координат одинаковы. Поэтому одинаковы и отношения $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Если уменьшить интервал времени в два раза, то и изменение координаты уменьшится тоже в два раза. Ведь за первую половину интервала тело проходит точно такое же расстояние, что и за вторую.

Обратите внимание на то, что скорость v_x может быть как положительной величиной, так и отрицательной.

Действительно, $\Delta t = t_2 - t_1$ всегда положительно ($\Delta t > 0$). Но изменение координаты Δx может быть как положительным ($\Delta x > 0$, если $x_2 > x_1$), так и отрицательным ($\Delta x < 0$, если $x_2 < x_1$).

Мы познакомились с очень важной физической величиной — скоростью. При равномерном прямолинейном движении скорость есть величина постоянная.

---

[1] Точнее, эту величину, как мы увидим в дальнейшем, следует называть проекцией скорости на ось X.

[2] От латинского слова constans — постоянный.

§ 1.5. КООРДИНАТЫ И ПРОЙДЕННЫЙ ПУТЬ ПРИ РАВНОМЕРНОМ ПРЯМОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ

Если скорость постоянна, то координата меняется со временем по простому закону.

Рассмотрим движение тела (точки) начиная с момента времени $t_0 = 0$. Пусть в начальный момент времени координата тела, называемая **начальной координатой**, равна x_0

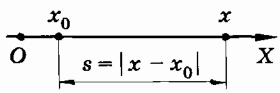


Рис. 1.8

(рис. 1.8). Тогда, обозначив координату в произвольный момент времени через x, согласно определению (1.4.1) получим:

$$v_x = \frac{x - x_0}{t}. \qquad (1.5.1)$$

Отсюда

$$\boxed{x = x_0 + v_x t.} \qquad (1.5.2)$$

Из этого уравнения видно, что зависимость координаты от времени — линейная. Так как v_x может быть как больше, так и меньше нуля, то координата x или возрастает, или убывает.

Простая формула (1.5.2) справедлива для любого момента времени только при равномерном прямолинейном движении, так как только в этом случае выражение (1.5.1) определяет скорость при любом значении t.

Итак, для определения координаты в произвольный момент времени надо знать начальную координату x_0 и скорость v_x. Эти величины, следовательно, необходимо измерить.

Подчеркнем, что формула (1.5.2) непосредственно определяет координату *движущейся точки*, *но не пройденный путь* (длину отрезка траектории, пройденного телом за время t). При прямолинейном движении в одном направлении пройденный путь s (см. рис. 1.8) равен модулю изменения координаты:

$$s = |x - x_0|.$$

Его можно найти, зная модуль скорости $v = |v_x|$:

$$s = |v_x|t = vt. \qquad (1.5.3)$$

Единица скорости

Модуль скорости равен:

$$v = |v_x| = \frac{s}{t}. \qquad (1.5.4)$$

Пользуясь этой формулой, устанавливаем единицу скорости:

$$\text{единица скорости} = \frac{\text{единица пути}}{\text{единица времени}}.$$

Следовательно, за единицу скорости принимается скорость равномерного прямолинейного движения тела (точки), при которой это тело за единицу времени проходит путь, равный единице длины.

Так, если время выражается в секундах, а расстояние (путь) — в метрах или сантиметрах, то

$$\text{единица скорости} = \frac{1\,\text{м}}{1\,\text{с}} = 1\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

или

$$\text{единица скорости} = \frac{1\,\text{см}}{1\,\text{с}} = 1\,\frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Равномерное прямолинейное движение как приближение

Отметим, что, строго говоря, равномерного прямолинейного движения не существует. Автомобиль на шоссе никогда не едет по абсолютно прямой линии; небольшие отклонения в ту или другую сторону от прямой всегда имеются. И значение скорости слегка изменяется. Небольшая неровность шоссе, порыв ветра, чуть-чуть большее нажатие на педаль газа и другие причины вызывают небольшие изменения скорости. Но приближенно на протяжении не слишком большого промежутка времени движение автомобиля можно считать прямолинейным и равномерным с достаточной для практических целей точностью. Таково одно из упрощений сложной действительности, позволяющее без больших усилий описывать многие движения. Можно привести другие примеры, в которых движение тел происходит практически прямолинейно и равномерно: моторная лодка на реке или озере, летящий самолет, центр шарика, катящегося по гладкому горизонтальному стеклу, парашютист с раскрытым парашютом в безветренную погоду и т. д.

При равномерном прямолинейном движении точки ее координата является линейной функцией времени.

§ 1.6. ГРАФИК СКОРОСТИ РАВНОМЕРНОГО ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ. ГРАФИК ПУТИ. ГРАФИК КООРДИНАТЫ

Познакомимся подробнее с самым наглядным способом описания движения — графическим — на примере равномерного прямолинейного движения.

График модуля скорости

При равномерном прямолинейном движении скорость v_x = const. Следовательно, и ее модуль v = const, т. е. не изменяется с течением времени. Графиком зависимости модуля скорости от времени[1] является прямая AB, параллельная оси времени и расположенная выше этой оси, так как $v > 0$ (рис. 1.9).

Площадь прямоугольника $OABC$, заштрихованного на рисунке, численно равна пути, пройденному телом за время t. Ведь сторона OA в определенном масштабе есть модуль скорости v, а сторона OC — время движения t, поэтому $s = vt$.

График скорости

В отличие от модуля скорости скорость, определяемая выражением (1.4.1), может быть положительной или отрицательной. Поэтому графиком зависимости скорости v_x от времени t может быть либо прямая BC, либо прямая KF (рис. 1.10). Обе прямые параллельны оси времени. Прямая BC соответствует положительному значению скорости ($v_{1x} > 0$), а прямая KF — отрицательному значению ($v_{2x} < 0$).

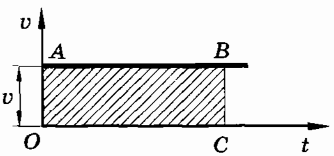


Рис. 1.9

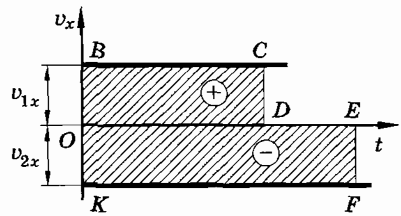


Рис. 1.10

---

[1] В дальнейшем для краткости мы будем часто говорить: «график модуля скорости», «график проекции скорости» и т. д.

Площади прямоугольников $OBCD$ и $OEFK$, заштрихованных на рисунке, численно равны соответствующим изменениям координат движущихся тел за время их движения. Так как $v_{1x} > 0$, то изменение координаты первого тела $\Delta x_1 = v_{1x}t_1$ положительно. Поэтому и площади прямоугольника $OBCD$ приписывается положительный знак. Скорость движения второго тела отрицательна: $v_{2x} < 0$. Поэтому отрицательным будет и изменение координаты $\Delta x_2 = v_{2x}t_2$. В этом случае изменение координаты численно равно площади лежащего ниже оси времени прямоугольника $OEFK$, взятой со знаком «минус».

График пути

При равномерном прямолинейном движении путь прямо пропорционален времени, так как модуль скорости $v = \text{const}$: $s = vt$. Следовательно, графиком, выражающим зависимость пути от времени, является прямая, выходящая из начала координат ($s(0) = 0$). Помните, что путь не бывает отрицательным и не может уменьшаться в процессе движения. Чем больше модуль скорости, тем больший угол образует график с осью времени.

На рисунке 1.11 представлены графики пути *1* и *2* для двух движущихся тел. Так как за 2 с первое тело прошло путь 1 м, то модуль скорости первого тела равен $v_1 = 0{,}5$ м/с.

Модуль скорости второго тела равен $v_2 = 2$ м/с, так как за 1 с тело прошло путь 2 м.

Для того чтобы по графику зависимости пути от времени определить путь, пройденный телом за определенный промежуток времени, надо из точки на оси времени, соответствующей

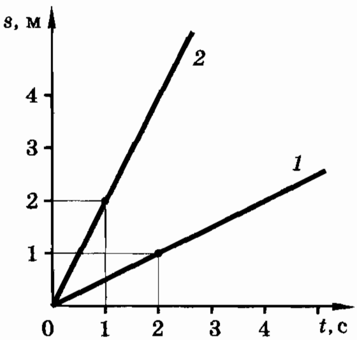


Рис. 1.11

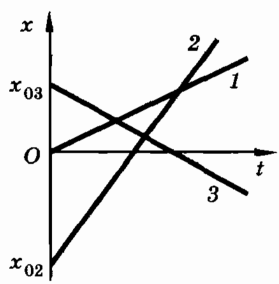


Рис. 1.12

концу промежутка, восставить перпендикуляр до пересечения с графиком, а затем из этой точки опустить перпендикуляр на ось s. Точка пересечения его с этой осью и будет значением пути в данный момент времени.

График координаты

Так как координата при равномерном прямолинейном движении является линейной функцией времени $x = x_0 + v_x t$, то график зависимости координаты от времени представляет собой прямую линию.

На рисунке 1.12 приведены графики зависимости координаты от времени для трех случаев. Прямая *1* соответствует случаю движения при $x_{01} = 0$, $v_{1x} > 0$; прямая *2* — случаю, когда $x_{02} < 0$, $v_{2x} > 0$; а прямая *3* — случаю, когда $x_{03} > 0$, $v_{3x} < 0$. Скорость v_{2x} больше, чем v_{1x}.

Посмотрим, какие сведения можно извлечь из графика AB равномерного движения тела (рис. 1.13). В начальный момент времени ($t_0 = 0$) тело имело координату $x_0 = 3$ м, в момент времени $t_1 = 6$ с координата тела $x_1 = 0$, т. е. оно находилось в начале координат, а в момент времени $t_2 = 9$ *с тело находилось на* оси X в точке с координатой $x_2 = -1{,}5$ м. Все это время тело двигалось противоположно положительному направлению оси X. Скорость тела равна $v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(0-3)\text{ м}}{6\text{ с}} = -0{,}5$ м/с, а модуль скорости $v = 0{,}5$ м/с.

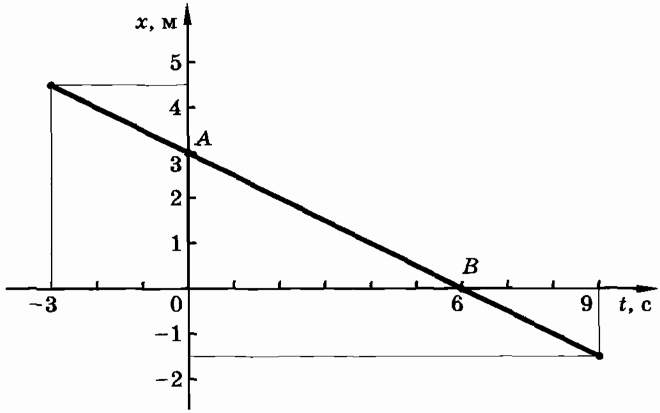


Рис. 1.13

Обратите внимание на то, что по графику зависимости $x(t)$ можно судить о «прошлом» в движении тела, т. е. можно находить положения тела до начала отсчета времени при условии, что и до этого момента тело двигалось равномерно и прямолинейно с той же скоростью. Моменты времени до начала отсчета считаются отрицательными. Согласно рисунку 1.13 за 3 с до начала отсчета времени тело имело координату 4,5 м.

Все графики равномерного прямолинейного движения представляют собой прямые линии. Для их построения достаточно указать значения $x(t)$ или $s(t)$ для двух моментов времени.

§ 1.7. СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ ПРЯМОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ. МГНОВЕННАЯ СКОРОСТЬ

Ни одно тело не движется все время с постоянной скоростью. Трогаясь с места, автомобиль начинает двигаться все быстрее и быстрее. Некоторое время он может двигаться равномерно, но рано или поздно замедляет движение и останавливается. При этом он проходит различные расстояния за одни и те же интервалы времени.

Что же надо понимать под скоростью, если тело движется неравномерно?

Средняя скорость

Введем понятие средней скорости неравномерного движения за интервал времени Δt.

Средней (по времени) скоростью неравномерного движения точки называется отношение изменения ее координаты Δx к интервалу времени Δt, в течение которого это изменение произошло:

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

По форме определение средней скорости неравномерного движения не отличается от определения скорости равномерного движения. Но содержание его будет иным[1]. Теперь отноше-

[1] Здесь и в дальнейшем черта над обозначением величины означает среднее значение этой величины.

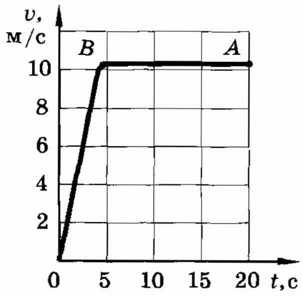


Рис. 1.14

ние $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ — уже не постоянно. Оно зависит как от значения интервала времени $\Delta t = t_2 - t_1$, так и от выбора начального момента времени t_1. Например, согласно таблице 1 (см. с. 34), средняя скорость автомобиля на интервале времени от 2-й до 4-й минуты равна $\frac{2130 \text{ м} - 1050 \text{ м}}{2 \text{ мин}} = 540$ м/мин, на интервале от 2-й до 3-й минуты равна $\frac{1840 \text{ м} - 1050 \text{ м}}{2 \text{ мин}} = 790$ м/мин, а на интервале от 3-й до 4-й минуты мы получаем значение $\frac{2130 \text{ м} - 1840 \text{ м}}{2 \text{ мин}} = 290$ м/мин.

Средняя скорость характеризует движение в течение интервала времени Δt именно в среднем и ничего не говорит о том, как же движется автомобиль в различные моменты времени этого интервала.

Другой пример. На рисунке 1.14 показан график скорости спринтера при забеге на 200 м. Проанализируем этот забег. Будем считать беговую дорожку прямолинейной. С точки зрения результата нас, конечно, интересует время забега ($\Delta t = 20$ с), и поэтому бег спортсмена можно характеризовать средней скоростью. Если координатную ось X совместить с беговой дорожкой (за начало отсчета можно принять точку на линии старта), то $\Delta x = 200$ м. Тогда $v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{200 \text{ м}}{20 \text{ с}} = 10$ м/с. Но спортсмена и его тренера интересуют и детали забега: сколько времени длился разбег, какую скорость развил спортсмен в конце разбега (точка B на графике). Ведь этим и будет определяться время забега. Но скорость спортсмена, соответствующая точке B графика, *это уже не средняя* скорость, а скорость спортсмена в момент времени $t = 4$ с.

Мгновенная скорость

Мгновенную скорость естественно было бы определить как скорость тела в данный момент времени или в данной точке траектории. На первый взгляд определение очень простое и понятное. Но так ли это? Как надо, например, понимать следующее утверждение: «*Скорость автомобиля в момент начала торможения* была 90 км/ч»? Перефразировка этого утверждения

«В момент начала торможения автомобиль за 1 ч прошел 90 км» бессмысленна.

Утверждение это, видимо, понимать надо так: если бы начиная с указанного момента времени автомобиль не стал бы тормозить, а продолжал бы двигаться так же, т. е. с той же быстротой, то за 1 ч он прошел бы 90 км, за 0,5 ч — 45 км, за 1 мин — 1,5 км, за 1 с — 25 м и т. д.

Результат последнего рассуждения весьма важен, ибо показывает, как в принципе можно определить мгновенную скорость автомобиля в момент t начала торможения (или любого другого тела, движущегося прямолинейно и неравномерно). Надо измерить среднюю скорость автомобиля на интервале времени от t до $t + \Delta t$ и согласиться, что мгновенная скорость автомобиля в момент времени t приблизительно равна этой средней скорости. Приближение будет тем лучше и, следовательно, мгновенная скорость будет определена тем точнее, чем меньше промежуток времени Δt. Ведь надо, чтобы на этом промежутке скорость менялась незначительно, а лучше, чтобы этим изменением вообще можно было пренебречь. Последнее замечание заставляет нас брать величину Δt все меньше и меньше, не ставя ограничения этому уменьшению. В математике это называют «стремление интервала времени Δt к нулю» и обозначают «$\Delta t \to 0$».

За очень малый промежуток времени от t до $t + \Delta t$ координата тела изменится также на малую величину Δx. Чтобы найти мгновенную скорость в момент времени t, надо малую величину Δx разделить на малую величину Δt и посмотреть, чему будет равно частное, если промежуток Δt неограниченно уменьшать, т. е. стремить к нулю. В математике говорят: «Найти предел отношения $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ при стремлении Δt к нулю» и записывают: $v_x = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$, где знак lim означает «предел».

Поясним сказанное на примере, когда движение тела описывается аналитически (формулой). Ведь по формуле можно найти положение тела в любой момент времени.

Пусть при движении тела вдоль оси X его координата изменяется согласно уравнению

$$x = kt^2,$$

где k — постоянный коэффициент[1].

---

[1] Потом мы увидим, что именно так меняется координата падающего на землю с небольшой высоты камня.

Примем $k = 5$ м/с^2 и вычислим изменения координаты тела за интервалы времени, равные 0,1, 0,01, 0,001 с ..., отсчитываемые, например, с момента времени $t_1 = 1$ с:

$$\Delta x_1 = 5\frac{\text{м}}{\text{с}^2}(1{,}1\ \text{с})^2 - 5\frac{\text{м}}{\text{с}^2}(1\ \text{с})^2 = 1{,}05\ \text{м},$$

$$\Delta x_2 = 5\frac{\text{м}}{\text{с}^2}(1{,}01\ \text{с})^2 - 5\frac{\text{м}}{\text{с}^2}(1\ \text{с})^2 = 0{,}1005\ \text{м},$$

. . . .

Найдем теперь отношения изменений координаты к тем промежуткам времени, за которые эти изменения произошли:

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{1{,}05\ \text{м}}{0{,}1\ \text{с}} = 10{,}5\ \text{м/с},$$

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{0{,}1005\ \text{м}}{0{,}01\ \text{с}} = 10{,}05\ \text{м/с},$$

. . . .

Результаты вычислений приведены в таблице 2.

Таблица 2

Δt, с	Δx, м	$\frac{\Delta x}{\Delta t}$, м/с
0,1	1,05	10,5
0,01	0,1005	10,05
0,001	0,010005	10,005
0,0001	0,00100005	10,0005

Из таблицы видно, что по мере приближения интервала времени Δt к нулю отношение $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ приближается к определенному значению (пределу), равному 10 м/с; это и есть скорость в момент времени $t_1 = 1$ с.

Если тело движется по закону $x = kt^2$, то предел $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ $\left(\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$ нетрудно вычислить. В начальный момент времени t $x_1 = kt^2$, а в момент $t + \Delta t$ $x_2 = k(t + \Delta t)^2$, следовательно, $\Delta x = x_2 - x_1 = k(t + \Delta t)^2 - kt^2 = 2kt\Delta t + k(\Delta t)^2$.

Тогда для отношения $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ получим:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = 2kt + k\Delta t.$$

Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ (мгновенная скорость) равен

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = 2kt.$$

Для данных нашего примера $v_x = 10$ м/с.

Таким образом, для любого момента времени отношение изменения координаты тела к промежутку времени, за который это изменение произошло, стремится к определенному значению при стремлении самого промежутка времени к нулю. Полученный вывод справедлив для любого неравномерного движения.

Мгновенной скоростью при прямолинейном движении называется предел, к которому стремится отношение изменения координаты точки к интервалу времени, за которое это изменение произошло, если интервал времени стремится к нулю[1].

По определению имеем:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \qquad (1.7.1)$$

В математике выражение $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ принято обозначать $\frac{dx}{dt}$. Тогда формулу (1.7.1) можно записать так:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}.$$

Выражение $\frac{dx}{dt}$ называется *производной координаты по времени*.

Иногда производную обозначают иначе: $v_x(t) = \frac{dx}{dt} = x'$ (читается «икс-штрих»).

Когда мы говорим, что скорость в данный момент времени равна 10 м/с, то это означает следующее: если бы начиная с этого момента тело продолжало двигаться равномерно целую

---

[1] Строго говоря, здесь речь идет об определении проекции мгновенной скорости на ось X (см. § 1.12).

секунду, то оно прошло бы 10 м. При равномерном движении средняя скорость за любой момент времени равна мгновенной.

В дальнейшем вы убедитесь, что именно мгновенная, а не средняя скорость играет в механике основную роль.

Как измерить мгновенную скорость

Измерить мгновенную скорость, осуществив экспериментально предельный переход $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$, практически невозможно. Используя стробоскопические фотографии (рис. 1.15), можно измерить координаты тела в очень близкие моменты времени и вычислить средние скорости между этими моментами. Но мгновенную скорость так определить нельзя.

Для измерения (разумеется, приближенного) используют различные явления, которые зависят от мгновенной скорости. Так, в спидометре автомобиля гибкий тросик передает вращение от ведомого вала коробки передач к маленькому постоянному магниту. Вращение магнита возбуждает электрический ток в катушке, в результате чего происходит поворот стрелки спидометра.

Чтобы узнать скорость самолета, измеряют давление встречного потока воздуха. В радарах используют изменение частоты радиоволн при отражении от движущихся тел.

При неравномерном движении скорость изменяется. Некоторое представление о движении дает средняя скорость. Но главную роль играет скорость в любой точке в данный момент времени. Это — мгновенная скорость.

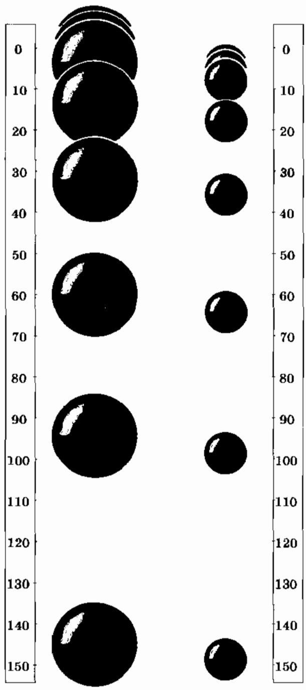


Рис. 1.15

Рисунок с фотографии двух падающих шариков различной массы. Фотографию получили, открывая объектив и чередуя вспышки света каждые 1/30 с. Заметьте, что маленький шарик достигает пола одновременно с большим. Оба шарика начинают падать одновременно.

§ 1.8. ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

До сих пор мы изучали движение вдоль заранее выбранной прямой линии. Автомобиль на узком участке прямого шоссе или поезд на прямолинейном участке железной дороги иначе и не могут двигаться. На реке нет ни дорог, ни рельсов, и лодка может плыть под любым углом к берегу. Правда, ограничение движения здесь есть. Лодка перемещается в одной определенной плоскости: вдоль поверхности воды. Самолет же может лететь как угодно: в горизонтальной плоскости, вниз или вверх. Как же описывать движение в этих более сложных случаях?

Мы ограничимся описанием только движения на плоскости. Здесь на первых порах встретится не так уж много нового. Тот прием, который был использован для описания движения вдоль заданной прямой, будет применен дважды.

Определить положение лодки в произвольном месте на реке с помощью одной координаты уже нельзя. Из курса математики вам известно, что положение точки на плоскости определяется двумя координатами. Нам потребуется теперь система координат из двух взаимно перпендикулярных осей X и Y. Начало координат и направление осей выбираются произвольно. Направим ось X вдоль берега (ее можно было бы провести и посредине реки), а ось Y — перпендикулярно берегу. Опустив из точки A на оси координат перпендикуляры AB и AC, найдем проекции точки A и тем самым координаты x и y, которые имеет лодка (рис. 1.16). Длины отрезков AB и AC равны модулям координат лодки:

$$AC = |x|, \ AB = |y|.$$

При движении тела координаты x и y меняются с течением времени. Пусть за интервал времени Δt лодка переместилась из точки A в точку A', причем не обязательно по прямой (рис. 1.17). Если обозначить координаты лодки в начальный момент времени через x_1, y_1, а в конечный — через x_2, y_2, то изменения координат можно выразить так:

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$
$$\Delta y = y_2 - y_1.$$

Величины Δx и Δy могут быть как положительными, так и отрицательными.

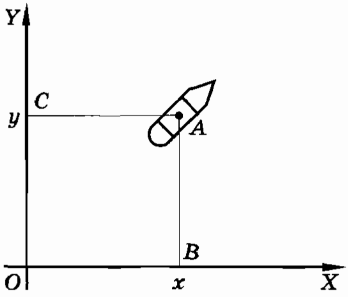


Рис. 1.16

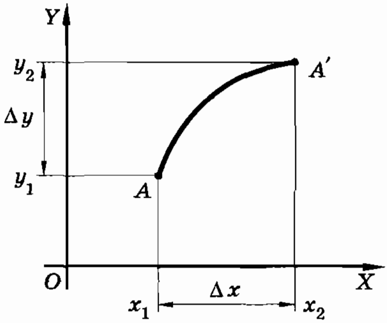


Рис. 1.17

В частном случае при равномерном прямолинейном движении скорости изменения координат $v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ и $v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$ не меняются с течением времени (см. § 1.4). В этом случае координата y, как и координата x, меняется с течением времени по линейному закону (1.5.2), который был получен для равномерного движения вдоль оси X:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t, \\ y = y_0 + v_y t, \end{cases} \tag{1.8.1}$$

где x_0 и y_0 — координаты тела в начальный момент времени, а v_x и v_y — скорости изменения координат, — постоянные величины. Исключив из этих уравнений время t, получим уравнение траектории, связывающее координаты x и y:

$$y = y_0 - \frac{v_y}{v_x} x_0 + \frac{v_y}{v_x} x.$$

Введем обозначения:

$$y_0 - \frac{v_y}{v_x} x_0 = b, \quad \frac{v_y}{v_x} = k,$$

тогда получим:

$$y = b + kx.$$

Так как величины b и k постоянные, то полученное уравнение является уравнением прямой. Если координаты тела меняются во времени по линейному закону, то траектория движения этого тела — прямая линия.

Движение на плоскости описывается двумя координатами x и y, зависящими от времени.

§ 1.9. КАК РЕШАТЬ ЗАДАЧИ ПО КИНЕМАТИКЕ

Настало время применить полученные знания для решения задач, вначале более простых — задач на равномерное прямолинейное движение.

Итак, вам надо решить задачу. Как правило, самое большое затруднение вызывает вопрос «С чего начать?». Универсальных правил решения любой задачи не существует. И все же вы быстрее научитесь решать задачи, если будете руководствоваться определенными правилами, действовать в определенной последовательности. Этими правилами можно пользоваться для решения задач не только на кинематику равномерного прямолинейного движения, но и в других случаях.

1. Внимательно, не торопясь, прочитайте условие задачи. Подумайте, о каком физическом явлении идет в ней речь. Какие физические величины известны, а какие надо найти?

2. Изобразите на рисунке (схематически) рассматриваемые тела, направления их движения.

3. Выберите систему отсчета. Для этого надо построить систему координат, т. е. задать ее начало и положительные направления координатных осей. Кроме того, надо выбрать начало отсчета времени. Без выбора системы отсчета описать движение *полностью невозможно.*

Для описания прямолинейного движения достаточна одна координатная ось, совмещенная с траекторией движения.

Выбор системы отсчета произволен и не влияет на конечный результат решения задачи. Но удачный выбор системы отсчета упрощает решение задачи.

4. Запишите уравнения, описывающие движения всех тел. В случае кинематики это уравнения зависимости координат тел от времени. Далее от уравнений для значений координат и проекций заданных величин надо перейти к уравнениям для их модулей. Это не простой момент, обратите на него внимание.

В задаче могут встретиться «скрытые условия», которые надо выразить на языке уравнений. Например, при встрече двух тел в момент времени $t_в$ их координаты x_1 и x_2 равны. Это условие дает уравнение:

$$x_1(t_в) = x_2(t_в).$$

Общее число уравнений должно равняться числу неизвестных.

5. Решите систему уравнений и выразите искомые величины в общем (буквенном) виде (иногда для решения задачи достаточ-

но одного уравнения). Полезно посмотреть, к каким результатам приводит уменьшение или увеличение величин, заданных в условии задачи. Надо проследить, чтобы наименования всех слагаемых величин в решении были одинаковы. Если у вас расстояния складываются со временем, то все надо начинать сначала.

6. Подставьте в буквенный ответ числовые значения заданных физических величин с наименованиями их единиц. Предварительно надо выразить все числовые значения в одной системе единиц.

Выполните вычисления и получите ответ. При этом пользуйтесь правилами приближенных вычислений. Для вычислений целесообразно применять микрокалькулятор.

Перечисленные рекомендации не надо считать абсолютно жесткими, неизменными. Всего не предусмотришь. В некоторых случаях отдельные пункты можно опустить; иногда придется вводить новые. Многие задачи проще решать графически.

Задача 1

Тело движется равномерно вдоль оси X со скоростью $v = 2$ м/с противоположно положительному направлению оси X. Найдите положение тела в момент времени $t = 10$ с после начала движения, если начальная координата $x_0 = 5$ м. Чему равен путь, пройденный телом?

Решение. Запишем уравнение для координаты тела:

$$x = x_0 + v_x t.$$

Согласно условию задачи $v_x = -v$. Теперь формула для координаты принимает вид:

$$x = x_0 - vt,$$

$$x = 5 \text{ м} - 2 \text{ м/с} \cdot 10 \text{ с} = -15 \text{ м}.$$

Пройденный телом путь равен

$$s = vt = 20 \text{ м}.$$

Задача 2

Из пунктов O и B, расстояние между которыми $l = 55$ км, одновременно начали двигаться с постоянными скоростями навстречу друг другу по прямому шоссе два автомобиля. Скорость первого автомобиля $v_1 = 50$ км/ч, а второго $v_2 = 60$ км/ч. Через какое время после начала движения автомобили встретятся? Найдите пути, пройденные каждым автомобилем за это время.

Решение. Примем пункт O за начало координат и направим координатную ось X в сторону пункта B (рис. 1.18). Движение автомобилей будет описываться уравнениями:

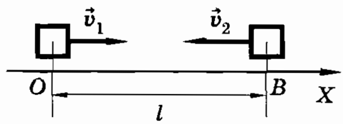


Рис. 1.18

$$x_1 = x_{01} + v_{1x}t,$$
$$x_2 = x_{02} + v_{2x}t.$$

В соответствии с выбранным началом координат

$$x_{01} = 0,\ x_{02} = l.$$

Так как первый автомобиль движется в положительном направлении оси X, а второй — в отрицательном, то

$$v_{1x} = v_1,\ v_{2x} = -v_2.$$

Поэтому, спустя время t,

$$x_1 = v_1 t,\ x_2 = l - v_2 t.$$

Когда автомобили встретятся, они будут иметь одну и ту же координату:

$$x_1 = x_2,$$

или

$$v_1 t = l - v_2 t.$$

Отсюда

$$t = \frac{l}{v_1 + v_2} = 0{,}5 \text{ ч}.$$

Пройденные пути равны

$$s_1 = v_1 t = 25 \text{ км},\ s_2 = v_2 t = 30 \text{ км}.$$

Задача 3

Движение точки на плоскости описывается уравнениями

$$x = 6 \text{ м} + 3 \text{ м/с} \cdot t,$$
$$y = 4 \text{ м/с} \cdot t.$$

Определите траекторию движения точки и постройте ее на плоскости XOY.

Решение. Уравнение траектории в явной форме находим, исключив из обоих уравнений время. Из первого уравнения имеем

$$t = \frac{x - 6 \text{ м}}{3 \frac{\text{м}}{\text{с}}} = \frac{x}{3 \frac{\text{м}}{\text{с}}} - 2 \text{ с}.$$

Подставляя это значение во второе уравнение для координаты y, получаем уравнение траектории:

$$y = \frac{4x}{3} - 8 \text{ м}.$$

Это уравнение прямой линии. Для построения прямой заметим, что при $x = 0$ $y = -8$ м и при $y = 0$ $x = 6$ м. Построим на чертеже точки $B(0, -8)$ и $C(6, 0)$. Через эти точки и проходит прямая (рис. 1.19).

На рисунке 1.19 указано также и направление скорости движения точки.

Задача 4

На рисунке 1.20 изображен график зависимости от времени координаты точки, движущейся вдоль оси X. Как двигалась точка? Постройте графики модуля v и проекции v_x скорости, а также пути в зависимости от времени.

Решение. В течение первых 3 с координата точки изменилась от 2 м до −4 м, следовательно, точка двигалась противоположно положительному направлению оси X. Проекция скорости равнялась

$$v_{1x} = \frac{-4 - 2}{3} \text{ м/с} = -2 \text{ м/с},$$

а модуль скорости $v_1 = 2$ м/с.

Следующие 4 с точка не двигалась (ее координата не изменилась), т. е. $v_{2x} = 0$, а потом в течение 2 с точка двигалась в по-

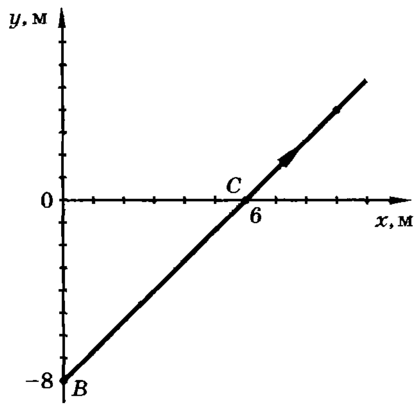


Рис. 1.19

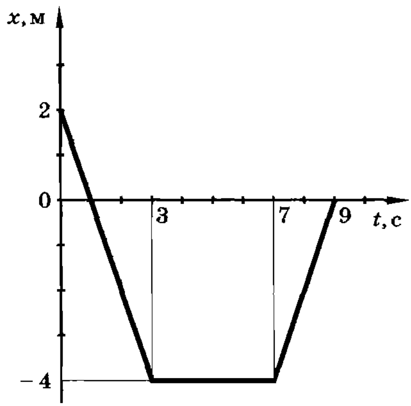


Рис. 1.20

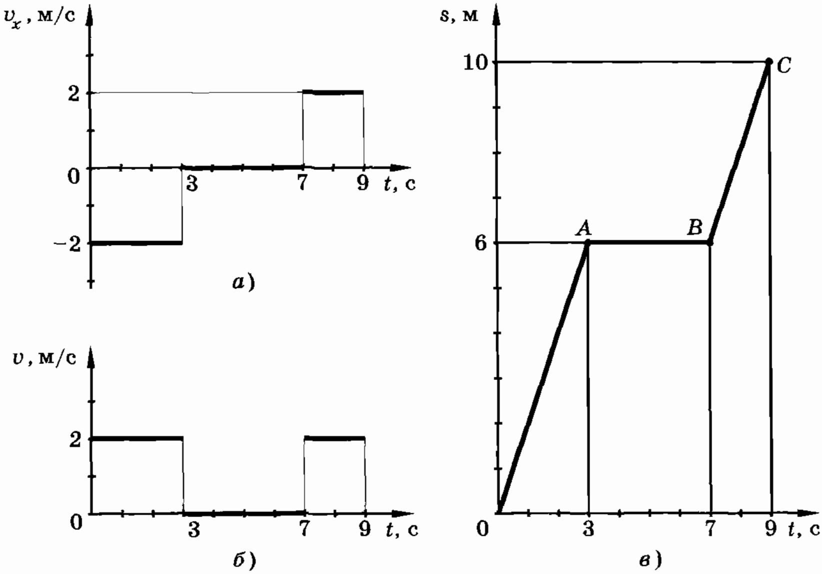


Рис. 1.21

ложительном направлении оси X и пришла в начало координат ($x = 0$). Проекция и модуль скорости соответственно равны

$$v_{3x} = v_3 = \frac{0 - (-4)}{2} \text{ м/с} = 2 \text{ м/с}.$$

На рисунке 1.21, *а* изображен график проекции скорости, а на рисунке 1.21, *б* — график модуля скорости. Графиком пути является ломаная линия $OABC$ на рисунке 1.21, *в*. При построении графика пути не надо забывать, что путь не может быть отрицательным и при движении не убывает.

Упражнение 1

1. Тело движется равномерно вдоль оси X противоположно ее положительному направлению. Модуль скорости равен 36 км/ч. Начальная координата равна 20 м. Найдите положение тела через 4 с. Чему равен путь, пройденный телом?
2. Тело движется равномерно в положительном направлении оси X. Модуль скорости равен 28,8 км/ч. Найдите положение тела через 5 с после начала движения, если начальная координата тела $x_0 = -40$ м. Чему равен путь, пройденный телом?
3. При движении вдоль прямой координата точки изменилась за 5 с от значения $x_0 = 10$ м до значения $x = -10$ м. Найдите модуль скорости и направление движения точки.

§ 1.10. ВЕКТОРЫ

Если человек сделал шаг, то важно знать не только длину шага, но и направление, в котором шаг сделан[1]*. В комнате это может быть и не так существенно, но, например, в горах неверно выбранное направление одного шага может закончиться трагически. Шаг, который вы делаете, является примером перемещения* (рис. 1.22). *Любое механическое перемещение определяется как его длиной, так и направлением. Поэтому его можно изображать направленным отрезком прямой — вектором.*

Вектор перемещения, векторные величины

В механике вектором перемещения или просто перемещением называется направленный отрезок прямой, проведенный из начального положения движущейся точки в ее конечное положение. Длина вектора перемещения называется его м о д у л е м.

Величины, подобные перемещению, которые, кроме своего модуля, характеризуются еще направлением в пространстве, называются векторными. Но в отличие от математики, где вектор есть только математическое понятие и ничего больше, в физике вектор имеет определенный физический смысл: он обозначает

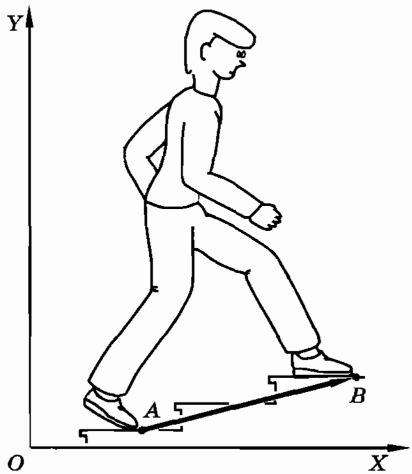


Рис. 1.22

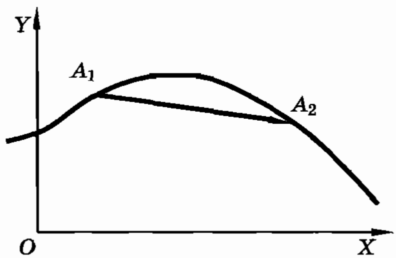


Рис. 1.23

[1] Для большей определенности надо следить за перемещением одной точки, например метки, сделанной мелом на носке ботинка.

какую-либо физическую величину. Поэтому к слову «вектор» мы должны добавить название этой физической величины. На рисунке 1.22 изображен вектор перемещения.

Обратите внимание: при криволинейном движении модуль перемещения не равен пути, пройденному точкой с момента времени t_1 до момента t_2 (рис. 1.23), т. е. длина кривой A_1A_2 больше длины вектора перемещения.

Векторной величиной является также скорость. Все векторные величины изображают направленными отрезками прямой, выбрав надлежащий масштаб при заданной единице этой величины. Как и для обычного отрезка, крайние точки вектора часто обозначают буквами (см. рис. 1.22). Однако в отличие от обычного отрезка (где A, B — концы отрезка) точка A называется началом вектора, а точка B — его концом. С помощью букв A и B вектор обозначается так: $\overrightarrow{AB}$ (над AB ставится символическая стрелка, указывающая на то, что отрезок AB — направленный).

Так же как и обычный отрезок, вектор обладает длиной, которая называется его модулем и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$. Модуль вектора так же, как и длину обычного отрезка, можно обозначать одной буквой, например $|\overrightarrow{AB}| = a$. Да и сам вектор $\overrightarrow{AB}$ можно записать тоже с помощью одной буквы: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.

Радиус-вектор

Положение тела в произвольной точке A пространства (рис. 1.24) можно задать с помощью р а д и у с а - в е к т о р а. **Радиусом-вектором называется вектор, проведенный из начала системы координат (точка O) в данную точку пространства.** Действительно, длина радиуса-вектора $\vec{r}$ или его модуль $|\vec{r}| = r$ *определяет* расстояние, на котором точка A (рис. 1.24) находится от начала координат, а стрелка указывает направление на точку пространства. Следовательно, радиус-вектор $\vec{r}$ указывает, на каком расстоянии и в каком направлении находится точка A пространства относительно начала выбранной системы координат.

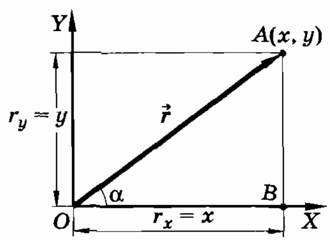


Рис. 1.24

Проекции радиуса-вектора

Проекциями радиуса-вектора $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ (см. рис. 1.24) на координатные оси X и Y являются координаты конца этого вектора, т. е. точки A. Проекции мы будем обозначать той же буквой, что и вектор, но без стрелки над ней и с индексом внизу, указывающим, на какую ось проецируется вектор. Так, r_x и r_y — проекции вектора $\vec{r}$ на оси координат X и Y. Тогда

$$r_x = x,\ r_y = y.$$

Проекции, как и координаты, могут быть положительными и отрицательными.

Координаты x и y точки A полностью определяют модуль радиуса-вектора и его направление на плоскости относительно координатных осей. Действительно, по известной из геометрии теореме Пифагора имеем:

$$|\overrightarrow{OA}|^2 = (OB)^2 + (AB)^2$$

или

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Угол α между направлением вектора $\vec{r}$ и осью X также определяется однозначно координатами x и y; его можно измерить, например, транспортиром. Можно также вычислить по формуле

$$\cos\alpha = \frac{x}{r},$$

а затем, пользуясь таблицами значений тригонометрических функций, определить сам угол.

Проекции вектора

Опустив перпендикуляры из начала и конца вектора перемещения $\overrightarrow{A_1A_2}$ (рис. 1.25) на оси координат X и Y, можно найти его проекции на эти оси. Проекции перемещения есть изменения координат Δx и Δy движущейся точки. Изменения координат могут быть как положительными, так и отрицательными величи-

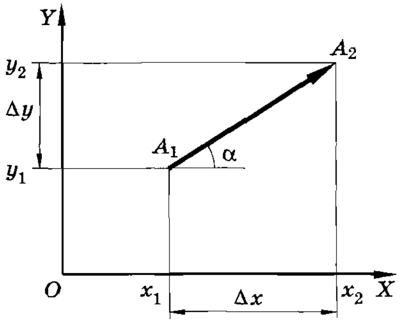


Рис. 1.25

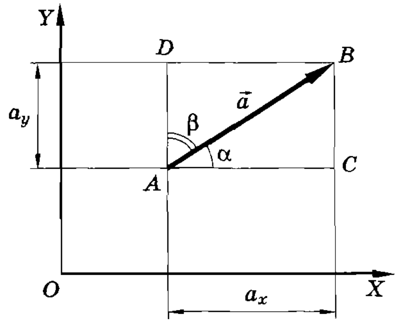


Рис. 1.26

нами. Поэтому проекции перемещения на оси координат также могут быть положительными и отрицательными.

Модуль и направление перемещения полностью определяются его проекциями на оси координат. Для модуля перемещения имеем (см. рис. 1.25):

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\,.$$

Направление вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ определяется углом α: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если, напротив, известен вектор перемещения, то однозначно определяются изменения координат Δx и Δy движущейся точки.

Проекции любого вектора находятся так же, как и проекции перемещения. Но они выражаются не в единицах длины, а в тех единицах, в которых выражается модуль данной величины.

Так как понятие проекции вектора мы будем широко использовать в дальнейшем, то дадим наиболее общее определение проекции.

Направление вектора $\vec{a}$ (рис. 1.26) можно задать углами α или β между вектором и положительными направлениями осей координат. Из рисунка видно, что модуль проекции a_x равен длине отрезка AC, а модуль проекции a_y — длине отрезка AD. Из прямоугольных треугольников ABC и ABD следует

$$\begin{cases} a_x = a\cos\alpha, \\ a_y = a\cos\beta. \end{cases} \qquad (1.10.1)$$

Проекция (или компонента) любого вектора на ось равна произведению модуля вектора и косинуса угла, образованно-

го вектором с положительным направлением оси.**

Формулы (1.10.1) показывают, что проекции вектора есть алгебраические величины, т. е. могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Знак проекции определяется знаком косинуса. Для острых углов $\cos\alpha > 0$, поэтому $a_x > 0$. Для тупых углов косинусы отрицательны, поэтому отрицательными являются проекции вектора на ось. Если $\alpha = 90°$, то $\cos\alpha = 0$ и $a_x = 0$. Для наглядности эти случаи изображены на рисунке 1.27, *а, б, в*. В случае, соответствующем рисунку 1.27, *б*, можно записать:

$$a_x = a\cos\alpha = -a\cos\theta.$$

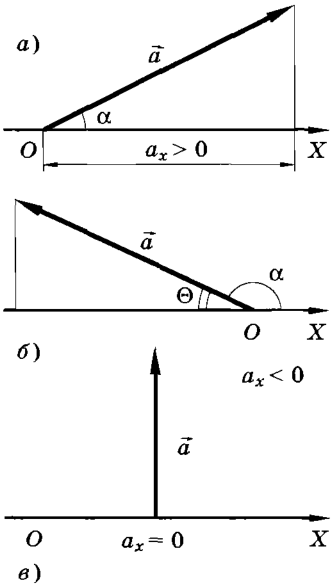


Рис. 1.27

Скаляры

Конечно, не все величины характеризуются направлением. Число горошин в стручке, длина предмета, температура, электрический заряд и т. д. характеризуются одним числом (это число может быть положительным, отрицательным или нулем). Подобные величины принято называть скалярами.

Значения скаляров не зависят от выбранной системы отсчета.

Положение точки на плоскости и ее перемещение могут быть заданы с помощью векторов. Вектор на плоскости определяется двумя числами — проекциями на оси прямоугольной системы координат. Наоборот, задание, например, радиуса-вектора $\vec{r}$ эквивалентно заданию координат x и y, а задание вектора перемещения эквивалентно заданию изменений координат Δx и Δy движущейся точки. Модуль вектора — неотрицательное число, а проекция может быть как положительной, так и отрицательной величиной (или равной нулю).

При движении точки ее радиус-вектор меняется со временем, т. е. является функцией времени: $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Это выражение есть сокращенная запись двух уравнений $x = x(t)$ и $y = y(t)$, описывающих движение на плоскости. Вместо двух уравнений (в общем случае движения в пространстве — трех) для координат или других величин, изменяющихся со временем, можно записать одно уравнение для векторов.

Впоследствии вы сможете убедиться в преимуществе использования векторов. Использование векторов значительно облегчает описание движения, делает его более наглядным, экономным и компактным.

Прямолинейное движение тоже можно описывать с помощью векторов. Однако заметных преимуществ это не дает.

? 1. Вектор $\vec{a}$ задан на плоскости своими проекциями на оси X и Y: $a_x = -2$ см, $a_y = 0$. Найдите модуль и направление вектора.

2. Вектор $\vec{a}$ задан на плоскости своими проекциями на оси X и Y: $a_x = 2$ см, $a_y = 2$ см. Найдите модуль и направление вектора.

§ 1.11. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Для дальнейшей работы нам необходимо вспомнить некоторые действия над векторами, известные вам из курса геометрии: сложение, вычитание векторов и умножение вектора на число. Но нам придется сделать дополнение к изучавшемуся в геометрии материалу: познакомиться с нахождением проекций вектора при сложении и вычитании векторов.

Сложение векторов

Если заданы два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то их можно сложить по правилам параллелограмма или треугольника (рис. 1.28). Вектор $\vec{c}$ является их суммой: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. В первом случае суммарный вектор представляет собой диагональ параллелограмма, построенного на составляющих векторах как на сторонах (начала всех трех векторов совпадают). Во втором случае поступают так: с концом вектора $\vec{a}$ совмещают начало вектора $\vec{b}$. Соединив

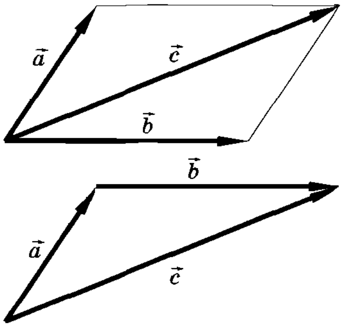


Рис. 1.28

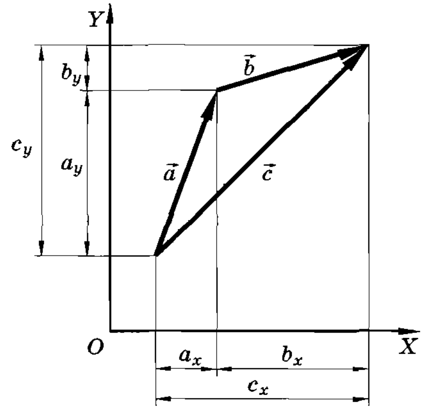


Рис. 1.29

затем начало первого вектора с концом второго, получают суммарный вектор. Обратите внимание на то, что при сложении векторов модуль результирующего вектора в общем случае не равен сумме модулей слагаемых векторов (длина стороны треугольника меньше суммы длин двух других сторон). Равенство имеет место лишь при сложении одинаково направленных векторов.

Для дальнейшего очень важно уяснить, что *проекции суммарного вектора на координатные оси равны сумме проекций слагаемых векторов*:

$$c_x = a_x + b_x,\ c_y = a_y + b_y.$$

Это непосредственно видно из рисунка 1.29.

Если складываются несколько векторов, то правило треугольника легко обобщается на правило многоугольника сложения векторов. Для этого выбирают произвольную точку A и в нее переносят начало первого вектора. Далее к концу первого вектора приставляют начало второго, к концу второго — начало третьего и т. д. Суммарным является вектор $\overrightarrow{AB}$, проведенный из начала первого в конец последнего (рис. 1.30).

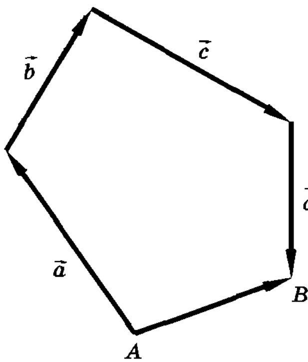


Рис. 1.30

Умножение вектора на число

Пусть требуется умножить вектор $\vec{a}$ на число n. Если число n положительное, то в результате умножения получится новый вектор $\vec{b} = n\vec{a}$, имеющий то же направление, что и вектор $\vec{a}$, но модуль в n раз больший (рис. 1.31, *а*).

Если вектор умножить на отрицательное число k ($k < 0$), то получится вектор $\vec{c} = k\vec{a}$, направленный противоположно вектору $\vec{a}$ (рис. 1.31, *б*). Модуль вектора $\vec{c}$ равен $c = |k|a$, а проекция вектора $\vec{c}$ равна $c_x = ka_x$.

Рис. 1.31

Вычитание векторов

Напомним теперь правило вычитания векторов. Когда мы имеем дело с числами, то вычитание одного числа из другого означает то же самое, что прибавление к уменьшаемому нового числа, противоположного по знаку вычитаемому, например $10 - 6 = 10 + (-6)$. Подобным образом выполняется и вычитание векторов. Вычесть из вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$ (рис. 1.32, *а*) — это то же самое, что прибавить к вектору $\vec{a}$ вектор $-\vec{b}$, отличающийся от вектора $\vec{b}$ тем, что он направлен в противоположную сторону (знак «минус» указывает здесь противоположность направления): $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

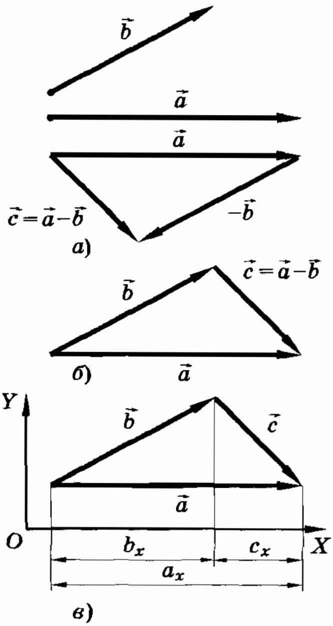


Рис. 1.32

Модули векторов $\vec{b}$ и $-\vec{b}$ равны, а их направления противоположны (такие векторы называют противоположными). Проекции противоположных векторов имеют противоположные знаки. Сами же векторы не могут быть ни положительными, ни отрицательными.

Можно находить разность векторов и несколько иначе. Если нарисовать векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выходящими из одной точки (рис. 1.32, *б*), то разность векторов изобразится вектором $\vec{c}$, проведенным из конца «вычитаемого» вектора к концу «уменьшаемого» вектора.

При вычитании векторов вычитаются и их проекции на координатные оси. Если $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, то $c_x = a_x - b_x$ и $c_y = a_y - b_y$.

Для проекций на ось X это непосредственно видно на рисунке 1.32, *в*.

Разложение вектора на составляющие

Из правил действия над векторами следует, что любой вектор можно бесконечным числом способов представить как сумму двух других векторов. Например, вектор $\vec{a}$ (рис. 1.33) можно выразить так:

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} = \vec{d} + \vec{e} = \ldots$$

При этом векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$, $\vec{d}$ и $\vec{e}$ и т. д. называются составляющими вектора $\vec{a}$, а само представление вектора $\vec{a}$ в виде суммы двух других векторов называется р а з л о ж е н и е м в е к т о р а н а е г о с о с т а в л я ю щ и е. В дальнейшем на многих примерах мы убедимся, что разумное разложение векторов упрощает решение ряда задач.

Радиус-вектор и вектор перемещения

Пусть точка A перемещается на плоскости из положения A_1 в положение A_2. Эти положения точки в системе координат XOY определяются радиусами-векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ (рис. 1.34).

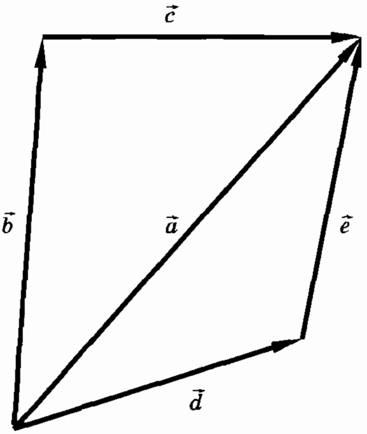


Рис. 1.33

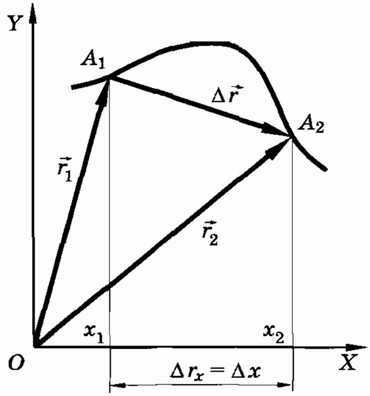


Рис. 1.34

Вектор перемещения $\overrightarrow{A_1A_2}$ (см. рис. 1.34) есть не что иное, как разность двух векторов $\vec{r}_2$ и $\vec{r}_1$: $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. В процессе движения точки A ее радиус-вектор изменяется по модулю и направлению. Изменение величины, как об этом уже говорилось, обозначается символом Δ (дельта), поэтому $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Теперь перемещение можно определить иначе, чем это было сделано в § 1.10.

Перемещением движущейся точки называется изменение ее радиуса-вектора.

Согласно определению, перемещение (см. рис. 1.34) равно

$$\Delta\vec{r} = \overrightarrow{A_1A_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \qquad (1.11.1)$$

В § 1.3 мы уже говорили, что для математического описания движения необходимо уметь находить положение тела в любой момент времени. Описать движение тела — это значит описать движение его точек. Положение точки можно задать радиусом-вектором. Следовательно, для описания движения надо уметь определять радиус-вектор точки в любой момент времени. Из рисунка 1.34 видно, что если известен радиус-вектор $\vec{r}_1$ в какой-то момент времени и известно перемещение $\Delta\vec{r}$, то можно найти радиус-вектор $\vec{r}_2$ в любой последующий момент времени: $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}$. Обычно радиус-вектор в начальный момент времени t_0 обозначают через $\vec{r}_0$, а в любой другой момент времени t — через $\vec{r}$. Поэтому

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \Delta\vec{r}. \qquad (1.11.2)$$

Это уравнение справедливо для любого движения — прямолинейного и криволинейного, равномерного и переменного.

Чтобы найти положение точки в любой момент времени, т. е. найти радиус-вектор $\vec{r}$, надо знать начальное положение точки, определяемое радиусом-вектором $\vec{r}_0$, и уметь вычислять перемещение $\Delta\vec{r}$.

Векторному уравнению (1.11.2) для движения на плоскости соответствуют два уравнения в координатной форме. Чтобы перейти к этим уравнениям, надо использовать проекции векторов на оси координат. Зная, что проекциями радиусов-векторов являются координаты концов этих векторов и что проекции перемещения равны изменениям координат, получим:

$$x = x_0 + \Delta x, \qquad (1.11.3)$$
$$y = y_0 + \Delta y.$$

Уравнение (1.11.2) есть компактная форма записи уравнений (1.11.3). В случае движения в пространстве к уравнениям (1.11.3) добавляется еще одно:

$$z = z_0 + \Delta z.$$

Чтобы найти положение точки на плоскости в любой момент времени (координаты x, y), надо знать ее начальное положение (координаты x_0, y_0) и уметь вычислять изменения координат Δx, Δy точки при движении.

Дальнейшая наша цель будет заключаться в том, чтобы научиться вычислять $\Delta\vec{r}$ или Δx, Δy при движении точки.

Мы повторили правила действия над векторами и познакомились с правилами действия над их проекциями. Научились раскладывать вектор на составляющие. Выяснили, что вектор перемещения равен разности двух радиусов-векторов.

? 1. Два вектора лежат на одной прямой и направлены в противоположные стороны. Куда направлен вектор их суммы и чему равен его модуль, если модули слагаемых векторов различны? одинаковы? Сделайте рисунки.

2. Вектор $\vec{c}$ является суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите модуль вектора $\vec{c}$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы на плоскости следующими значениями своих проекций: $a_x = 4$ см, $b_x = -1$ см, $a_y = 2$ см, $b_y = -6$ см.

3. Два вектора расположены на одной прямой и направлены в одну сторону. Куда направлен вектор их разности и чему равен его модуль? Ответьте на этот же вопрос, если векторы направлены в противоположные стороны.

4. Вектор $\vec{c}$ является разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите модуль вектора $\vec{c}$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы следующими значениями своих проекций: $a_x = -1$ см, $b_x = 2$ см, $a_y = -2$ см, $b_y = -6$ см.

§ 1.12. СКОРОСТЬ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

Подобно перемещению, скорость является вектором. Она характеризует не только быстроту движения тела, но и направление его движения. Говорят о направлении движения пешехода, машины, лодки, самолета, ракеты и т. д.

Под направлением движения тела в некоторый момент времени принято понимать направление его скорости в этот момент. Скорость $\vec{v}$ можно изобразить направленным отрезком (стрелкой), длина которого в определенном масштабе характеризует модуль скорости (рис. 1.35).

Средняя скорость

Понятие вектора скорости вводится в принципе таким же способом, как и понятие скорости изменения координаты тела (см. § 1.7). Вектор средней (по времени) скорости равен отношению вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ к интервалу времени Δt, за который это перемещение совершилось:

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{1.12.1}$$

Направление вектора средней скорости $\vec{v}_{\text{ср}}$ совпадает с направлением вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ (рис. 1.36).

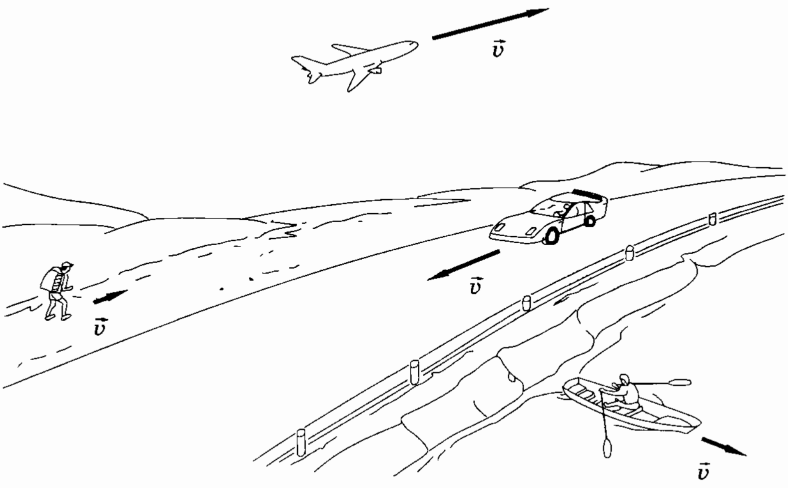


Рис. 1.35

Мгновенная скорость

Средняя скорость, определяемая выражением (1.12.1), сама по себе не играет практически существенной роли. Например, при посадке на Луну космического аппарата или при стыковке космических кораблей необходимо знать не среднюю скорость, а скорость в каждое мгновение, в каждой точке сложной криволинейной траектории — мгновенную скорость. Но чтобы ввести понятие мгновенной скорости произвольного криволинейного движения, надо воспользоваться понятием средней скорости. Прием, используемый здесь, вполне подобен приему, применяемому при введении понятия мгновенной скорости прямолинейного неравномерного движения.

При уменьшении интервала времени Δt перемещения $\Delta\vec{r}_1$, $\Delta\vec{r}_2$, $\Delta\vec{r}_3$ ... точки A, движущейся по криволинейной траектории, уменьшаются по модулю и меняются по направлению (рис. 1.37). Соответственно средние скорости $\frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t}$, $\frac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t}$, $\frac{\Delta\vec{r}_3}{\Delta t}$ ... меняются по модулю и направлению. Но по мере приближения интервала Δt к нулю отношение $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ приближается к определенному предельному значению. Это предельное значение мы будем называть мгновенной скоростью.

Итак, мгновенной скоростью называется предел отношения перемещения $\Delta\vec{r}$ к интервалу времени Δt, в течение которого это перемещение произошло, если интервал времени стремится к нулю.

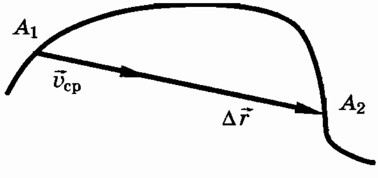


Рис. 1.36

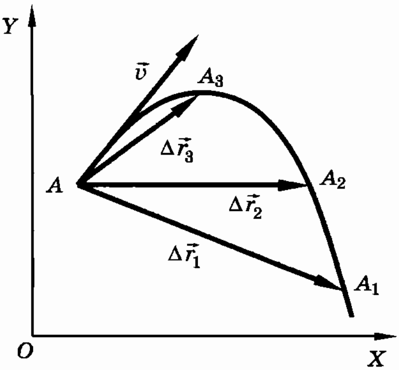


Рис. 1.37

По определению имеем

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.} \qquad (1.12.2)$$

Мгновенную скорость, как и в § 1.7, можно записать с помощью производной

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t).$$

Эта величина характеризует быстроту изменения радиуса-вектора движущейся точки во времени.

Мгновенная скорость направлена по касательной к траектории. Действительно, при уменьшении интервала Δt вектор $\Delta \vec{r}$ уменьшается по модулю и его направление приближается к направлению касательной к траектории, проведенной в точке A. В предельном случае бесконечно малого интервала времени dt вектор перемещения совпадает с бесконечно малым участком траектории, т. е. направлен по касательной к ней. А вектор скорости всегда направлен так же, как и вектор перемещения.

В частности, скорость точки, движущейся по окружности, направлена по касательной к этой окружности. Это нетрудно наблюдать. Если маленькие частички отделяются от вращающегося диска, то они летят по касательной, так как имеют в момент отрыва скорость, равную скорости точек на окружности диска. Вот почему грязь из-под колес буксующей машины летит по касательной к окружности колес (рис. 1.38, a). Также

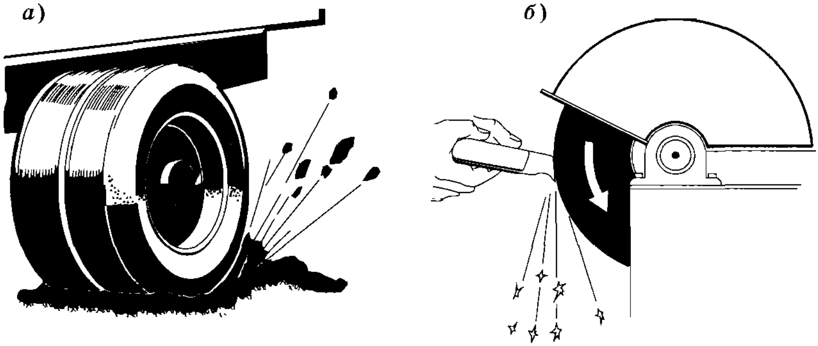


Рис. 1.38

по касательной летят раскаленные частицы точильного камня, отрывающиеся от вращающегося диска, если коснуться его поверхности стальным резцом (рис. 1.38, *б*).

Так как изменения координат Δx, Δy и Δz являются проекциями вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ на соответствующие оси координат (см. § 1.11), то скорости изменения координат

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t},\ v_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t},\ v_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \qquad (1.12.3)$$

$$\left(\text{или } v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt},\ v_z = \frac{dz}{dt}\right)$$

являются проекциями на оси X, Y и Z вектора скорости v движущейся точки[1]. Формула для мгновенной скорости (1.12.2), по существу, есть символическая запись трех выражений (1.12.3).

Модуль вектора скорости определяется через его проекции по общему для всех векторов правилу:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \qquad (1.12.4)$$

Направление вектора $\vec{v}$ определяется его проекциями v_x, v_y и v_z, так же однозначно, как определяется направление вектора $\vec{r}$ координатами x, y и z конца этого вектора.

В случае движения с постоянной скоростью система уравнений (1.8.1) эквивалентна одному векторному уравнению

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t, \qquad (1.12.5)$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки в момент времени t, $\vec{r}_0$ — начальный радиус-вектор. Это непосредственно следует из того факта, что проекция суммарного вектора равна сумме проекций слагаемых векторов (см. § 1.11).

Подобно радиусу-вектору и перемещению, скорость является вектором. Мгновенная скорость или скорость в точке представляет собой производную радиуса-вектора по времени.

[1] Каждая из этих формул есть не что иное, как определение мгновенной скорости (1.7.1) для прямолинейного движения вдоль осей X, Y, Z. Впрочем, в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением движения на плоскости и поэтому не будем пользоваться осью Z и соответственно v_z.

§ 1.13. СРЕДНИЙ МОДУЛЬ СКОРОСТИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Очень часто, например при составлении расписания движения автобусов, поездов и других средств транспорта, нужно уметь оценивать время, необходимое для прохождения определенного пути. Или, наоборот, знать приблизительно путь, проходимый за какое-либо определенное время. Для этого необходимо ввести понятие еще одной средней скорости.

Конечно, если бы мы знали мгновенную скорость в каждой точке траектории, то обе задачи могли бы быть решены. Но ведь заранее знать скорость, например, автобуса в каждой точке практически невозможно. Дорожные условия, светофоры, интенсивность движения на дороге и другие факторы влияют на мгновенную скорость движения. Не поможет здесь и знание вектора средней скорости. Так как автомобиль в конце рабочего дня возвращается в гараж, то модуль вектора перемещения за день равен нулю и равен нулю модуль средней скорости: $v_{ср} = 0$. Между тем автомобиль прошел большой путь, измеряемый счетчиком, находящимся в самом автомобиле. Ясно, что определить пройденный путь с помощью вектора средней скорости нельзя.

Поэтому целесообразно ввести еще одну величину — средний модуль скорости $\bar{v}$ (путевую скорость), равный (по определению) отношению пути s (т. е. длине траектории) к промежутку времени t, за который этот путь пройден:

$$\bar{v} = \frac{s}{t}. \qquad (1.13.1)$$

Ясно, что средний модуль скорости — это скалярная величина. Когда говорят о скорости движения поездов, судов, пешеходов и т. п., то имеют в виду именно путевую скорость. К примеру, расстояние от Москвы до Тулы, равное 180 км, поезд проходит за 3 ч. Средний модуль скорости равен 60 км/ч. Совершенно очевидно, что не всегда поезд имел именно такую скорость. При отправлении от станций скорость поезда увеличивалась, а при торможении уменьшалась и равнялась нулю во время стоянок. На некоторых участках пути она была и более 60 км/ч. Но если бы поезд двигался с постоянной скоростью

60 км/ч, то он путь от Москвы до Тулы прошел бы за 3 ч, как и при неравномерном движении.

Надо отчетливо представлять себе, что путевая скорость при движении тела не является постоянной величиной. Она зависит как от значения интервала времени $\Delta t = t_2 - t_1$, так и от выбора начального момента времени t_1. Например, согласно таблице 1, средний модуль скорости на интервале от 2-й до 4-й минуты равен $\dfrac{2130 \text{ м} - 1050 \text{ м}}{2 \text{ мин}} = 540$ м/мин, на интервале от 2-й до 3-й минуты он равен $\dfrac{1840 \text{ м} - 1050 \text{ м}}{1 \text{ мин}} = 790$ м/мин, а на интервале от 3-й до 4-й минуты получаем значение $\dfrac{2130 \text{ м} - 1840 \text{ м}}{1 \text{ мин}} =$ $= 290$ м/мин.

Именно знание путевой скорости позволяет приближенно вычислить путь, пройденный за определенное время, или время прохождения определенного пути.

§ 1.14. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Первую половину прямолинейного участка пути турист прошел со скоростью $v_1 = 4{,}8$ км/ч, а вторую половину — со скоростью $v_2 = 3{,}6$ км/ч. Чему равна средняя скорость движения туриста на всем участке пути?

Решение. При решении этой задачи мы некоторые пункты из рекомендованных советов опустим. Здесь нет надобности в выборе системы координат и составлении уравнения, описывающего движение туриста. Важно лишь знать, что такое средняя скорость. (В данном случае средняя скорость и средний модуль скорости совпадают.) Решение этой задачи поучительно еще и тем, что не надо бояться временно в процессе решения вводить величины, значения которых в условии задачи не даны.

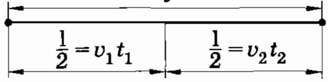


Рис. 1.39

Обозначим весь путь, пройденный туристом, буквой l (рис. 1.39), а время, за которое этот путь пройден, — буквой t. Тогда, согласно определению, средняя скорость туриста на всем пути равна

$$\bar{v} = \frac{l}{t}. \qquad (1.14.1)$$

Время t складывается из времени t_1 прохождения туристом первой половины пути $\left(t_1 = \frac{l}{2v_1}\right)$ и времени t_2 прохождения им второй половины пути $\left(t_2 = \frac{l}{2v_2}\right)$:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{l}{2v_1} + \frac{l}{2v_2} = \frac{l(v_1 + v_2)}{2v_1v_2}.$$

Подставляя это выражение для времени t движения туриста в формулу (1.14.1), получим:

$$\bar{v} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} \approx 4{,}1 \text{ км/ч}.$$

Задача 2

Координаты точки при равномерном прямолинейном движении на плоскости XOY за время $t = 2$ с изменились от начальных значений $x_0 = 5$ м, $y_0 = 7$ м до значений $x = -3$ м, $y = 1$ м. Найдите модуль скорости точки. Изобразите вектор скорости на рисунке.

Решение. Для нахождения модуля скорости надо знать проекции скорости на оси координат. Из уравнений $x = x_0 + v_xt$ и $y = y_0 + v_yt$ находим обе проекции скорости:

$$v_x = \frac{x - x_0}{t} = -4 \text{ м/с}, \quad v_y = \frac{y - y_0}{t} = -3 \text{ м/с}.$$

Определим модуль скорости (см. § 1.12):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 5 \text{ м/с}.$$

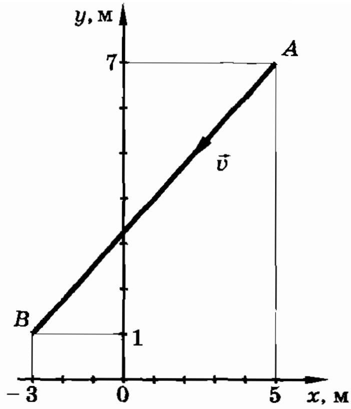


Рис. 1.40

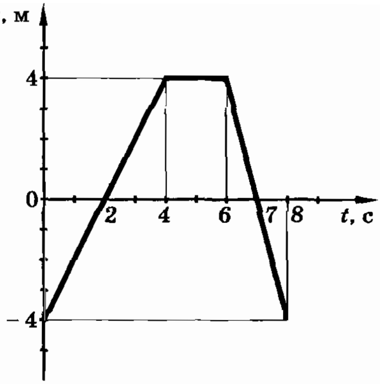


Рис. 1.41

Положение точки в начальный и конечный моменты времени, ее траектория и вектор скорости изображены на рисунке 1.40.

Упражнение 2

1. Координаты точки при равномерном прямолинейном движении на плоскости XOY за время $t = 2$ с изменились от начальных значений $x_0 = -3$ м и $y_0 = -2$ м до значений $x = 5$ м и $y = 6$ м. Найдите модуль и направление скорости точки. Постройте траекторию и укажите направление скорости на рисунке.

2. Точка M совершает движение на плоскости XOY. Координаты точки в зависимости от времени изменяются так:

$$x = -4\text{ м/с} \cdot t,\ y = 6\text{ м} + 2\text{ м/с} \cdot t.$$

Запишите уравнение траектории $y = y(x)$ точки M. Найдите начальные координаты движущейся точки и ее координаты через 1 с после начала движения.

3. На рисунке 1.41 изображен график зависимости координаты от времени, когда точка движется вдоль оси X. Опишите характерные особенности движения точки: в каких направлениях двигалась точка относительно оси X в различные интервалы времени; в какой момент времени точка была в начале координат; чему равнялись проекции и модули скоростей за отдельные интервалы времени? Постройте графики проекции и модуля скорости, а также пути в зависимости от времени.

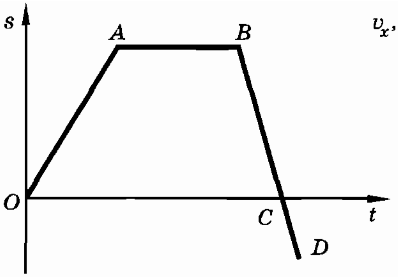


Рис. 1.42

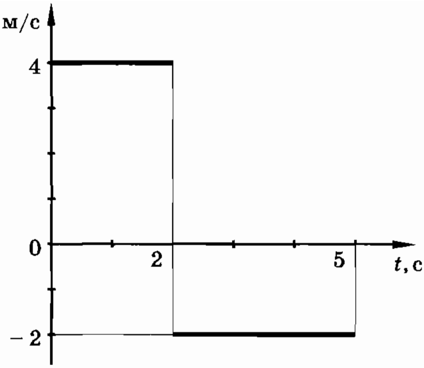


Рис. 1.43

4. Может ли график зависимости пути от времени иметь вид, представленный на рисунке 1.42?

5. На рисунке 1.43 представлен график зависимости от времени проекции скорости точки, движущейся вдоль оси X. Начертите графики координаты и пути в зависимости от времени. Начальная координата точки $x_0 = -8$ м.

6. Один локомотив прошел первую половину пути l со скоростью $v_1 = 80$ км/ч, а вторую половину пути — со скоростью $v_2 = 40$ км/ч. Другой локомотив шел половину времени t со скоростью $v_1 = 80$ км/ч, а половину времени — со скоростью $v_2 = 40$ км/ч. Найдите средние модули скоростей обоих локомотивов.

7. По шоссе со скоростью $v_1 = 16$ м/с движется автобус. Человек находится на расстоянии $a = 60$ м от шоссе и на расстоянии $b = 400$ м от автобуса. В каком направлении должен бежать человек, чтобы оказаться в какой-либо точке шоссе одновременно с автобусом или раньше него? Человек может бежать со скоростью $v_2 = 4$ м/с.

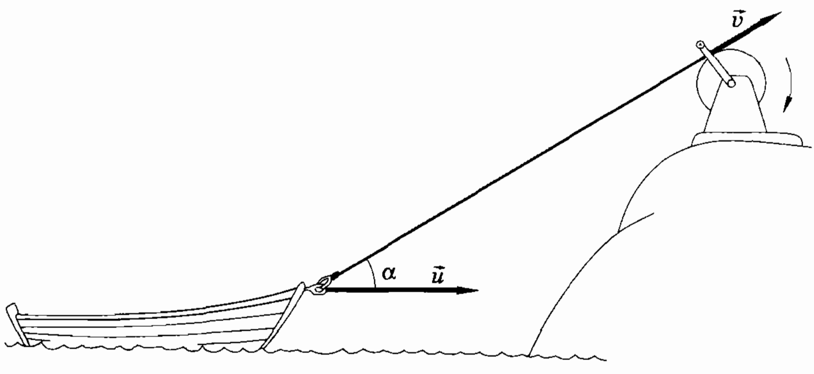


Рис. 1.44

8. Лодку тянут за веревку с крутого берега с постоянной по модулю скоростью $\vec{v}$. Найдите зависимость модуля скорости u лодки от угла α между веревкой и горизонтальным направлением (рис. 1.44).

§ 1.15. УСКОРЕНИЕ

Введем еще одну физическую величину, характеризующую движение, — ускорение. Необходимость введения ускорения первым понял Галилей.

При движении тел их скорости обычно меняются либо по модулю, либо по направлению, либо же одновременно и по модулю, и по направлению. Так, например, скорость шайбы, скользящей по льду, уменьшается с течением времени до полной ее остановки. Если взять в руки камень и разжать пальцы, то при падении камня его скорость быстро нарастает. Скорость любой точки окружности точила при неизменном числе оборотов в единицу времени меняется только по направлению, оставаясь постоянной по модулю (рис. 1.45). Если бросить камень под углом к горизонту, то его скорость будет меняться и по модулю, и по направлению.

Изменение скорости тела может происходить очень быстро (движение пули в канале ствола при выстреле из винтовки) и сравнительно медленно (движение поезда при его отправлении от вокзала). **Величину, характеризующую быстроту изменения скорости, называют ускорением.**

Ускорение — важнейшая физическая величина. **Наш мир таков, что действия одних тел на другие определяют не скорости тел, а быстроту изменения скоростей, т. е. ускорения.** Об этом подробнее будет сказано при изучении динамики. Пока же дадим точное определение физической величины, называемой ускорением точки.

После того как много внимания было уделено определению вектора скорости, вам уже проще будет понять, что такое ускорение.

Вектор средней скорости равен отношению вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ (изменения радиуса-вектора $\vec{r}$) к интервалу времени Δt, за который это перемещение произошло, а вектор среднего уско-

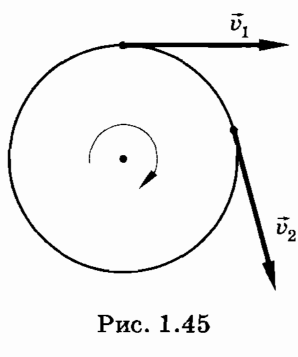


Рис. 1.45

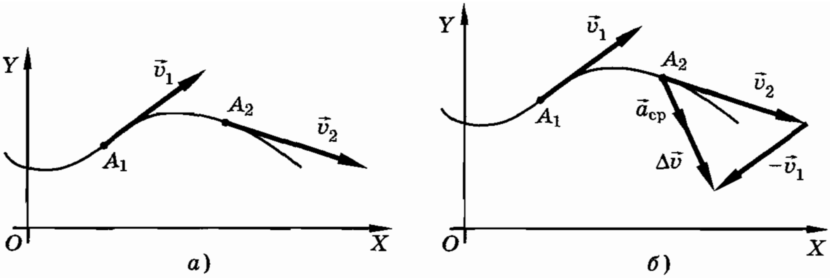


Рис. 1.46

рения равен отношению вектора изменения скорости $\Delta\vec{v}$ к интервалу времени Δt, за который произошло изменение скорости.

Поясним определение среднего ускорения. Пусть точка движется по криволинейной траектории (рис. 1.46, *а*). За промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ она перейдет из положения A_1 в положение A_2. При этом ее скорость изменится. Обозначим начальную и конечную скорости через $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Изменение скорости за время Δt равно $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. На рисунке 1.46, *б* проведено геометрическое вычитание векторов скоростей и построен вектор $\Delta\vec{v}$.

Среднее ускорение за время Δt равно:

$$\vec{a}_{ср} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Вектор $\vec{a}_{ср}$ имеет одинаковое направление с вектором $\Delta\vec{v}$.

Подобно тому как вектор средней скорости играет преимущественно вспомогательную роль, среднее ускорение также не является основным понятием. Нужно уметь определять ускорение в каждой точке траектории. Это ускорение называется м г н о в е н н ы м. Именно мгновенное ускорение, как вы увидите впоследствии, определяется действием на данное тело окружающих тел.

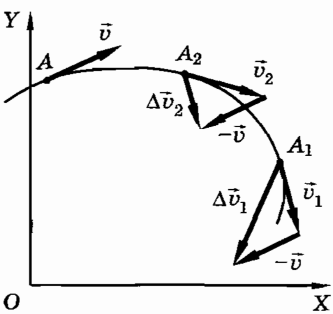


Рис. 1.47

На разных участках траектории за одинаковые промежутки времени Δt изменение скорости $\Delta\vec{v}$ может быть различным как по модулю, так и по направлению.

При уменьшении интервала времени Δt изменения скорости $\Delta\vec{v}$ уменьшаются по модулю и меняются по направлению (рис. 1.47). Соответственно средние ускорения

$\frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta t}$, $\frac{\Delta\vec{v}_2}{\Delta t}$, $\frac{\Delta\vec{v}_3}{\Delta t}$ ... также меняются по модулю и по направлению. Но по мере приближения интервала Δt к нулю отношение $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ стремится к определенному предельному значению. Это предельное значение и есть мгновенное ускорение, или просто ускорение точки.

Ускорением называется предел отношения изменения скорости $\Delta\vec{v}$ к промежутку времени Δt, в течение которого это изменение произошло, если интервал времени Δt стремится к нулю:

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}} \qquad (1.15.1)$$

или

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}'(t).$$

Здесь сходство с нашими рассуждениями о скорости налицо. Ускорение тоже скорость, но скорость изменения скорости.

В отличие от скорости знание траектории движения точки не позволяет определить направление ускорения. В то время как скорость направлена по касательной к траектории, направление ускорения совпадает с направлением изменения скорости $\Delta\vec{v}$ за малый интервал времени. Изменение же скорости только при прямолинейном движении совпадает с направлением самой скорости или противоположно ему. Поэтому ускорение может быть направлено под различными углами по отношению к траектории. Но оно всегда направлено «внутрь» траектории. Попробуйте в этом убедиться сами с помощью рисунка 1.47.

Векторное уравнение (1.15.1) при движении на плоскости эквивалентно двум уравнениям для проекций вектора $\vec{a}$ на координатные оси[1]:

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}, a_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \qquad (1.15.2)$$

или

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}.$$

---

[1] Можно было бы сначала рассмотреть ускорение при прямолинейном движении, как мы это делали, вводя понятие скорости, но теперь, когда понятие вектора введено, в таком более детальном изложении нет необходимости.

Измерение ускорения в данной точке путем нахождения изменения скорости при переходе тела в близкую точку — задача весьма трудная. Ускорение обычно измеряют не прямо, а косвенно, используя законы динамики.

У многих из вас может возникнуть вопрос. Ускорение тоже может изменяться. Не следует ли ввести величину, характеризующую быстроту изменения ускорения?

Конечно, такую величину ввести можно, но в этом нет необходимости. Дело в том, что взаимодействие тел в нашем мире определяет быстроту изменения скорости, а не быстроту изменения ускорения. Поэтому знать ускорение нам необходимо, чтобы вычислять скорость и координаты тела, а знание быстроты изменения ускорения ничего нового нам не даст.

Мы ввели новую физическую величину, характеризующую быстроту изменения скорости, — ускорение. Эта величина позволит нам изучить еще одно достаточно простое движение.

?

1. Точка движется по криволинейной траектории с постоянной по модулю скоростью. Имеет ли точка ускорение?
2. Может ли тело иметь ускорение, если его скорость в данный момент времени равна нулю?

§ 1.16. ДВИЖЕНИЕ С ПОСТОЯННЫМ УСКОРЕНИЕМ

Изучая различные движения, можно выделить один сравнительно простой и распространенный вид движения — движение с постоянным ускорением. Дадим определение и точное описание этого движения. Впервые движение с постоянным ускорением открыл Галилей.

Простой случай неравномерного движения — это движение с постоянным ускорением, при котором модуль и направление ускорения не меняются со временем. Оно может быть прямолинейным и криволинейным. Приблизительно с постоянным ускорением движется автобус или поезд при отправлении в путь или при торможении, скользящая по льду шайба и т. д. Все тела под влиянием притяжения к Земле падают вблизи ее поверхности с постоянным ускорением, если сопротивлением воздуха можно пренебречь. Об этом пойдет речь в дальнейшем. Мы будем изучать в основном именно движение с постоянным ускорением.

При движении с постоянным ускорением вектор скорости за любые равные интервалы времени изменяется одинаково. Если уменьшить интервал времени в два раза, то и модуль вектора изменения скорости также уменьшится в два раза. Ведь за первую половину интервала скорость изменяется точно так же, как и за вторую. При этом направление вектора изменения скорости остается неизменным. Отношение изменения скорости к интервалу времени будет одним и тем же для любого промежутка времени. Поэтому выражение для ускорения можно записать так:

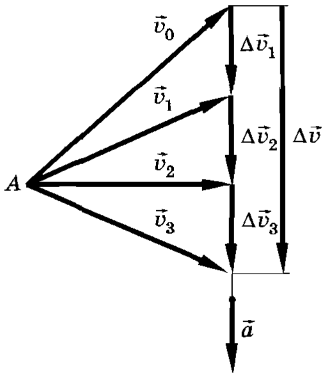


Рис. 1.48

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}. \qquad (1.16.1)$$

Поясним сказанное рисунком. Пусть траектория криволинейна, ускорение постоянно и направлено вниз. Тогда и векторы изменения скорости за равные интервалы времени, например за каждую секунду, будут направлены вниз. Найдем изменения скорости за последовательные интервалы времени, равные 1 с. Для этого отложим из одной точки A скорости $\vec{v}_0$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ и т. д., которые приобретает тело через 1 с, и произведем вычитания начальной скорости из конечной. Так как $\vec{a}$ = const, то все векторы приращения скорости за каждую секунду лежат на одной вертикали и имеют одинаковые модули (рис 1.48), т. е. модуль вектора изменения скорости $\Delta\vec{v}$ возрастает равномерно.

Если ускорение постоянно, то его можно понимать как изменение скорости в единицу времени. Это позволяет установить единицы для модуля ускорения и его проекций. Запишем выражение для модуля ускорения:

$$a = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}.$$

Отсюда следует, что

$$\text{единица ускорения} = \frac{\text{единица скорости}}{\text{единица времени}}.$$

Следовательно, за единицу ускорения принимается постоянное ускорение движения тела (точки), при котором за единицу времени модуль скорости изменяется на единицу скорости:

$$\text{единица ускорения} = \frac{1\,\text{м/с}}{1\,\text{с}} = 1\ \text{м/с}^2$$

или

$$\text{единица ускорения} = \frac{1\ \text{см/с}}{1\ \text{с}} = 1\ \text{см/с}^2.$$

Эти единицы ускорения читаются так: один метр на секунду в квадрате и один сантиметр на секунду в квадрате.

Единица ускорения 1 м/с^2 — это такое постоянное ускорение, при котором модуль изменения скорости за каждую секунду равен 1 м/с.

Если ускорение точки непостоянно и в какое-либо мгновение становится равным 1 м/с^2, то это не означает, что за секунду модуль приращения скорости равен 1 м/с. В данном случае значение 1 м/с^2 надо понимать так: если бы начиная с данного мгновения ускорение стало постоянным, то за каждую секунду модуль изменения скорости был бы равен 1 м/с.

Автомобиль «Жигули» при разгоне с места приобретает ускорение 1,5 м/с^2, а поезд — около 0,7 м/с^2. Падающий на землю камень движется с ускорением 9,8 м/с^2.

Из всевозможных видов неравномерного движения мы выделили наиболее простое — движение с постоянным ускорением. Однако не существует движения со строго постоянным ускорением, как и не существует движения со строго постоянной скоростью. Все это простейшие модели реальных движений.

? 1. Точка движется по криволинейной траектории с ускорением, модуль которого постоянен и равен 2 м/с^2. Означает ли это, что за 1 с модуль скорости точки изменяется на 2 м/с?
2. Точка движется с переменным ускорением, модуль которого в некоторый момент времени равен 3 м/с^2. Как истолковать это значение ускорения движущейся точки?

§ 1.17. СКОРОСТЬ ПРИ ДВИЖЕНИИ С ПОСТОЯННЫМ УСКОРЕНИЕМ

Выясним, как зависит скорость от времени, если ускорение постоянно.

Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ скорость точки равнялась $\vec{v}_0$ (начальная скорость). Тогда, обозначив скорость в произвольный момент времени через $\vec{v}$, получим в соответствии с формулой (1.16.1):

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}. \tag{1.17.1}$$

Отсюда

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t.} \tag{1.17.2}$$

Векторному уравнению (1.17.2) соответствуют три уравнения для проекций вектора скорости на оси координат. Ниже мы покажем, что движение с постоянным ускорением совершается в одной плоскости. Поэтому целесообразно совмещать систему координат XOY с этой плоскостью. Тогда формуле (1.17.2) будут соответствовать две формулы для проекций вектора скорости на координатные оси:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + a_x t, \\ v_y &= v_{0y} + a_y t. \end{aligned} \tag{1.17.3}$$

При движении с постоянным ускорением скорость точки и ее проекции изменяются со временем по линейному закону.

Для определения скорости в произвольный момент времени надо знать начальную скорость $\vec{v}_0$ и ускорение $\vec{a}$.

Начальная скорость не зависит от того, какие тела действуют на данное тело в рассматриваемый момент времени. Она определяется тем, что происходило с телом в предшествующие моменты времени. Например, начальная скорость падающего камня зависит от того, просто ли мы выпустили его из рук или же он попал в данную точку, описав предварительно ту или иную траекторию. Ускорение же, наоборот, не зависит от того, что происходило с телом в предыдущее время, а лишь от действий на него других тел в данный момент. Подробно об этом будет рассказано в следующей главе.

Формулы (1.17.2) и (1.17.3) справедливы как для прямолинейного, так и для криволинейного движения.

Движение с постоянным ускорением совершается в одной плоскости

Для доказательства данного утверждения воспользуемся формулой скорости $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$. Пусть ускорение $\vec{a}$ образует с начальной скоростью $\vec{v}_0$ некоторый угол α (рис. 1.49, *а*). Из кур-

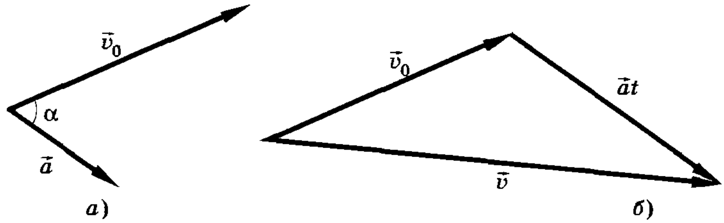


Рис. 1.49

са математики известно, что два пересекающихся вектора лежат в одной плоскости. Вектор $\vec{a}t$ имеет то же направление, что и $\vec{a}$, так как $t > 0$. Поэтому векторы $\vec{v}$ и $\vec{a}t$ расположены в той же плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{v}_0$. Сложив векторы $\vec{v}_0$ и $\vec{a}t$ (рис. 1.49, *б*), получим вектор, который в любой момент времени t будет расположен в плоскости, в которой находятся векторы $\vec{a}$ и $\vec{v}_0$.

При движении с постоянным ускорением скорость точки и ее проекции меняются со временем по линейному закону.

§ 1.18. ГРАФИКИ ЗАВИСИМОСТИ МОДУЛЯ И ПРОЕКЦИИ УСКОРЕНИЯ И МОДУЛЯ И ПРОЕКЦИИ СКОРОСТИ ОТ ВРЕМЕНИ ПРИ ДВИЖЕНИИ С ПОСТОЯННЫМ УСКОРЕНИЕМ

Графики дают возможность представить зависимость скорости и ускорения от времени при движении тела (точки) наглядно.

Графики модуля и проекции ускорения

Если точка движется с постоянным ускорением, то графики модуля и проекции ускорения будут прямыми, параллельными оси времени. Надо помнить, что модуль — неотрицательная величина, поэтому график модуля ускорения не может быть расположен ниже оси времени (рис. 1.50). Проекции ускорения могут иметь положительные и отрицательные значения (рис. 1.51, *а*, *б*). Рисунок 1.51, *б* показывает, что ускорение постоянно и направлено противоположно оси X.

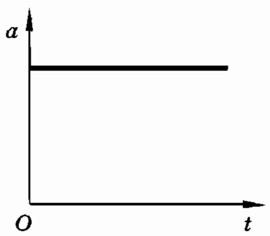


Рис. 1.50

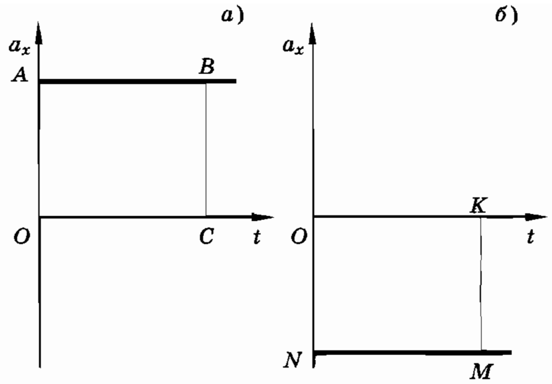


Рис. 1.51

По графику проекции ускорения можно найти, кроме a_x, изменение проекции скорости. Оно численно равно площади прямоугольника $OABC$ или $OKMN$, так как $\Delta v_x = a_x t$, а $a_x t$ численно равно площади прямоугольника $OABC$ или $OKMN$.

Площадь берется со знаком минус, если она расположена ниже оси времени, что соответствует рисунку 1.51, *б*, где $\Delta v_x = a_x t < 0$.

График модуля скорости

Формулы проекций скорости (1.17.3) являются линейными функциями времени. Поэтому графики модуля и проекций скорости представляют собой прямые линии. На рисунке 1.52 представлены графики зависимости модуля скорости от времени для трех движений с постоянным ускорением. Графики *2* и *3* соответствуют движениям, модули начальных скоростей которых соответствуют отрезкам OA и OB. График *1* соответствует движению с равномерно возрастающим модулем скорости и начальной скоростью, равной нулю. График *3* соответствует движению с модулем скорости, равномерно убывающим до нуля. Отрезок OC численно равен времени движения точки до остановки.

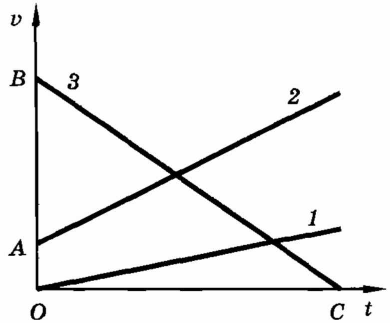


Рис. 1.52

График проекции скорости

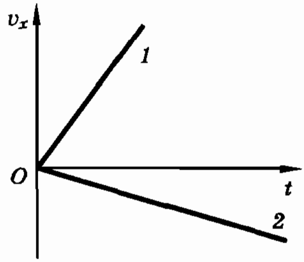


Рис. 1.53

Графики модуля скорости содержат меньше информации, чем графики проекции скорости, так как по первым графикам нельзя судить о направлении движения относительно координатных осей.

На рисунке 1.53 изображены графики *1, 2* проекций скорости двух точек. Обе они имеют начальную скорость, равную нулю. Первая точка движется в положительном направлении оси X, и так как $\Delta v_x > 0$, то $a_{1x} > 0$. Вторая точка движется противоположно оси X, так как $\Delta v_x < 0$, поэтому для этой точки $a_{2x} < 0$.

На рисунке 1.54 также изображены графики *1, 2* проекций скорости двух точек. Обе они имеют одно и то же значение проекции начальной скорости, соответствующее отрезку OA. Согласно графику *1* точка движется в положительном направлении оси X, причем модуль и проекция скорости равномерно возрастают.

Согласно графику *2* (см. рис. 1.54) точка в течение некоторого промежутка времени (отрезок OB) движется в положительном направлении оси X ($v_x > 0$) с равномерно уменьшающимся до нуля (остановка) значением проекции скорости. После этого проекция скорости становится отрицательной; это означает, что точка стала двигаться в направлении, противоположном положительному направлению оси X. При этом проекция скорости по модулю, а значит, и модуль скорости равномерно увеличиваются. Проекция ускорения точки отрицательна. Так как проекция скорости точки равномерно убывает, то проекция ускорения остается постоянной. Следовательно, точка движется с постоянным ускорением.

Графики зависимости скорости и ускорения от времени при постоянном ускорении довольно просты. Главное здесь — привыкнуть к изображению положительных и отрицательных величин и не путать графики модулей и проекций.

?

1. Покажите, что угол наклона графика проекции скорости к оси времени тем больше, чем больше модуль проекции ускорения, т. е. проекция ускорения является угловым коэффициентом прямой.
2. На рисунке 1.55 изображены графики *1, 2* проекций скорости двух точек. Докажите, что графики соответствуют движению с ускорением, не изменяющимся как по модулю, так и по направлению.

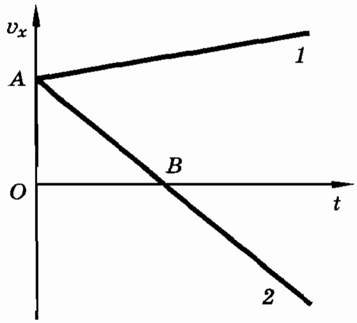


Рис. 1.54

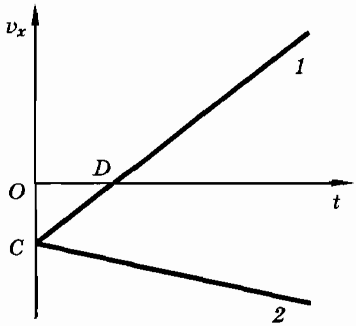


Рис. 1.55

3. Как изменяется скорость точки, график проекции скорости которой в зависимости от времени изображен прямой *1* (см. рис. 1.55)? Чему соответствуют отрезки *OC* и *OD*?

4. Как изменялась скорость точки (см. график *2* на рисунке 1.55)? Чему соответствует отрезок *OC*? Куда направлено ускорение точки относительно оси *X*?

§ 1.19. ЗАВИСИМОСТЬ КООРДИНАТ И РАДИУСА-ВЕКТОРА ОТ ВРЕМЕНИ ПРИ ДВИЖЕНИИ С ПОСТОЯННЫМ УСКОРЕНИЕМ

Для полного описания движения с постоянным ускорением надо решить последнюю задачу: найти зависимость координат и радиуса-вектора от времени.

Для всех видов движения координаты точки в любой момент времени можно найти по формулам (1.11.3). Запишем выражение для одной из координат движущейся точки: $x = x_0 + \Delta x$. В случае движения с постоянным ускорением изменение координаты сравнительно легко можно определить с помощью графика зависимости проекции скорости от времени.

В § 1.6 мы говорили, что изменение координаты при равномерном прямолинейном движении можно найти по площади прямоугольника под графиком проекции скорости: $\Delta x = v_x t$. Задача упрощалась тем, что $v_x = \text{const}$.

При движении с постоянным ускорением проекция скорости не остается постоянной, а изменяется в зависимости от времени по линейному закону. На рисунке 1.56 изображен график

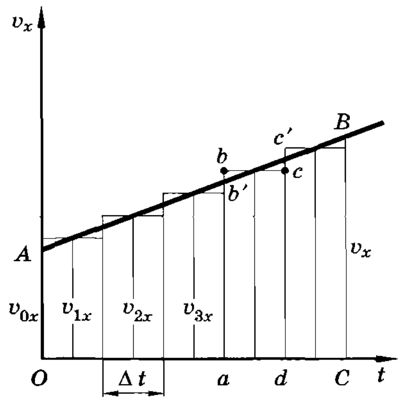


Рис. 1.56

зависимости v_x от t для движения с постоянным ускорением, причем $a_x > 0$ и $v_{0x} > 0$.

Покажем, что в этом случае Δx численно равно площади трапеции $OABC$.

Длина отрезка OC численно равна времени t движения тела. Разделим его на n малых одинаковых интервалов Δt. Значения проекций скорости, соответствующих серединам этих промежутков времени, обозначим через v_{1x}, v_{2x}, v_{3x} и т. д. Построим на каждом из отрезков, численно равных промежуткам времени Δt, прямоугольники, высоты которых численно равны проекциям скоростей v_{1x}, v_{2x}, v_{3x} и т. д. Площади этих прямоугольников численно равны изменениям координаты Δx_1, Δx_2, Δx_3, ... за промежутки времени Δt, если считать, что движение в течение каждого такого промежутка является равномерным.

Нетрудно видеть, что сумма площадей всех прямоугольников равна площади трапеции $OABC$, так как площадь малого прямоугольника $abcd$ равна площади элементарной трапеции $ab'c'd$.

Все прямоугольники образуют ступенчатую фигуру. Переход от одного прямоугольника к другому происходит скачкообразно, так как мы заменили истинное движение суммой равномерных движений за малые интервалы времени Δt. Чтобы это движение совпало с истинным, необходимо уменьшать промежутки времени Δt. Тогда различие между проекциями скорости ab и dc' в начале и конце отрезка времени Δt будет все меньше и меньше, и в пределе, когда $\Delta t \to 0$, ступенчатое движение не будет отличаться от истинного. Таким образом, и площадь

S трапеции $OABC$ численно станет равной изменению координаты Δx за время t.

Из курса математики известно, что площадь S трапеции определяется по формуле

$$S_{OABC} = \frac{OA + BC}{2} \cdot OC.$$

Длины оснований OA и BC этой трапеции численно равны проекциям v_{0x} и v_x начальной и конечной скоростей, а длина высоты OC — времени движения t точки. Следовательно,

$$\Delta x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t. \qquad (1.19.1)$$

Учитывая, что

$$v_x = v_{0x} + a_x t,$$

получим:

$$\Delta x = \frac{v_{0x} + v_{0x} + a_x t}{2} t = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Мы вывели эту формулу для случая, когда $v_{0x} > 0$ и $a_x > 0$. Можно показать, что она справедлива и тогда, когда одна из этих величин или обе они отрицательны. Желающих приглашаем это сделать.

Проекцию перемещения на ось Y можно найти точно таким же способом.

Нам известно, что движение с постоянным ускорением происходит в одной плоскости, в которой расположены векторы $\vec{v}_0$ и $\vec{a}$. Если через эти векторы провести координатную плоскость XOY, то для полного описания движения будет достаточно двух формул для зависимости координат от времени: $x(t)$ и $y(t)$.

Подставляя найденные значения изменения координат в формулы (1.11.3), получим выражения для координат при движении с постоянным ускорением как функции времени:

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2},$$

$$y = y_0 + v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2}. \qquad (1.19.2)$$

Эти формулы применимы для описания как прямолинейного движения (в этом случае целесообразно ось X направить по прямой, вдоль которой движется точка), так и криволинейного движения. Важно лишь, чтобы ускорение было постоянным.

Двум уравнениям (1.19.2) соответствует одно векторное уравнение:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}.} \qquad (1.19.3)$$

Обратите внимание на то, что при помощи уравнений (1.19.2) или (1.19.3) мы можем найти только положение движущейся точки в любой момент времени, но не пройденный точкой путь. При прямолинейном движении с постоянным ускорением возможно изменение направления скорости на противоположное (например, при движении брошенного вверх тела). В таком случае надо определить, в какой точке траектории произошло изменение направления скорости. Путь находится суммированием длин отрезков траектории, пройденных телом за указанное время.

В принципе формулы (1.17.2) *и* (1.19.3) *позволяют решить любую задачу на движение точки с постоянным ускорением.*

§ 1.20. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ С ПОСТОЯННЫМ УСКОРЕНИЕМ

Среди разнообразных движений с постоянным ускорением наиболее простым является прямолинейное движение. Если при этом модуль скорости возрастает, то движение иногда называют равноускоренным, а при уменьшении модуля скорости — равнозамедленным. Подобного рода движения совершает поезд, отходящий от станции или приближающийся к ней. Равноускоренно движется камень, брошенный вертикально вниз, а равнозамедленно — камень, брошенный вертикально вверх.

Для описания прямолинейного движения с постоянным ускорением можно обойтись одной осью координат (например, осью X), которую целесообразно направить вдоль траектории движения. В этом случае любая задача решается при помощи двух уравнений:

$$v_x = v_{0x} + a_x t \qquad (1.20.1)$$

и

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}. \qquad (1.20.2)$$

Проекция перемещения и путь при прямолинейном движении с постоянным ускорением

Проекцию на ось X перемещения, равную $\Delta x = x - x_0$, найдем из уравнения (1.20.2):

$$\Delta x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}. \qquad (1.20.3)$$

Если скорость тела (точки) не меняет своего направления, то путь равен модулю проекции перемещения

$$s = |\Delta x| = \left| v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2} \right|. \qquad (1.20.4)$$

Если же скорость меняет свое направление, то путь вычисляется сложнее. В этом случае он складывается из модуля перемещения до момента изменения направления скорости и модуля перемещения после этого момента.

Средняя скорость при прямолинейном движении с постоянным ускорением

Из формулы (1.19.1) следует, что

$$\frac{v_{0x} + v_x}{2} = \frac{\Delta x}{t}.$$

Но $\frac{\Delta x}{t}$ — это проекция средней скорости на ось X (см. § 1.12), т. е. $\frac{\Delta x}{t} = \bar{v}_x$. Следовательно, при прямолинейном движении с постоянным ускорением проекция средней скорости на ось X равна:

$$\bar{v}_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2}. \qquad (1.20.5)$$

Можно доказать, что если какая-нибудь другая физическая величина находится в линейной зависимости от времени, то среднее по времени значение этой величины равно полусумме ее наименьшего и наибольшего значений в течение данного промежутка времени.

Если при прямолинейном движении с постоянным ускорением направление скорости не меняется, то средний модуль скорости равен полусумме модулей начальной и конечной скоростей, т. е.

$$\bar{v} = |\bar{v}_x| = \frac{|v_{0x} + v_x|}{2} = \frac{v_0 + v}{2}. \qquad (1.20.6)$$

Связь между проекциями начальной и конечной скоростей, ускорения и перемещения

Согласно формуле (1.19.1)

$$\Delta x = \frac{v_{0x} + v_x}{2} t. \qquad (1.20.7)$$

Время t выразим из формулы (1.20.1)

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x}$$

и подставим в (1.20.7). Получим:

$$\Delta x = \frac{v_x + v_{0x}}{2} \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}.$$

Отсюда

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x \Delta x. \qquad (1.20.8)$$

Полезно запомнить формулу (1.20.8) *и выражение* (1.20.6) *для средней скорости. Эти формулы могут понадобиться для решения многих задач.*

? 1. Как направлено ускорение при отправлении поезда от станции (разгон)? При подходе к станции (торможение)?

2. Начертите график пути при разгоне и при торможении.

3. Докажите самостоятельно, что при равноускоренном прямолинейном движении без начальной скорости пути, проходимые телом за равные последовательные промежутки времени, пропорциональны последовательным нечетным числам:

$$s_1 : s_2 : s_3 \ldots = 1 : 3 : 5 : \ldots .$$

Впервые это было доказано Галилеем.

§ 1.21. ГРАФИКИ ЗАВИСИМОСТИ КООРДИНАТ ОТ ВРЕМЕНИ ПРИ ДВИЖЕНИИ С ПОСТОЯННЫМ УСКОРЕНИЕМ

Графики зависимости координат от времени сложнее графиков скорости и ускорения. Им нужно уделить большое внимание.

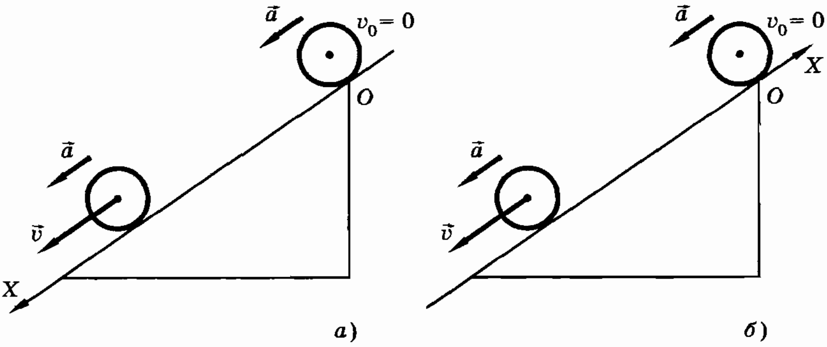


Рис. 1.57

Выражения для координат (1.19.2) представляют собой квадратичные функции времени, если в этих уравнениях $a_x \neq 0$ и $a_y \neq 0$. *Поэтому их графиками являются* параболы (или части парабол).

Рассмотрим прямолинейное движение по наклонному желобу. Пусть шар начинает скатываться из состояния покоя ($v_0 = 0$). Будем рассматривать движение центра шара. Оно, как было установлено еще Галилеем, является равноускоренным. Выберем начало координат в точке, откуда началось движение. Если ось X направить вниз вдоль желоба (рис. 1.57, *а*), то координаты центра шара при движении будут положительными. При этом $v_x > 0$ и $a_x > 0$, так как $\vec{v}$ и $\vec{a}$ имеют такое же направление, что и ось X. Графиком $x(t)$ служит парабола OA (рис. 1.58) с вершиной в точке O.

Если же ось X направить вдоль желоба вверх (рис. 1.57, *б*), $a_x < 0$, $v_x < 0$ и координата центра шара $x < 0$. Графиком будет парабола OB с вершиной в точке O (см. рис. 1.58).

Оба случая движения описываются уравнением $x = \frac{a_x t^2}{2}$. Теперь рассмотрим скатывание шаров, соответствующее рисунку 1.59, *а*, *б*. Здесь $v_0 = 0$, поэтому зависимость координаты от времени имеет вид $x = x_0 + \frac{a_x t^2}{2}$. Движению с $x_{01} > 0$ соответствует парабола DC (рис. 1.60). При движении, изображенном на рисун-

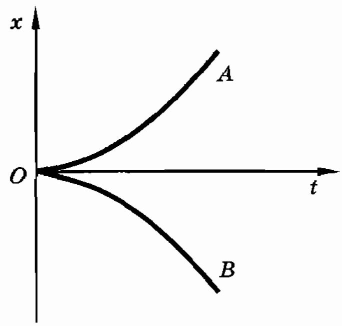


Рис. 1.58

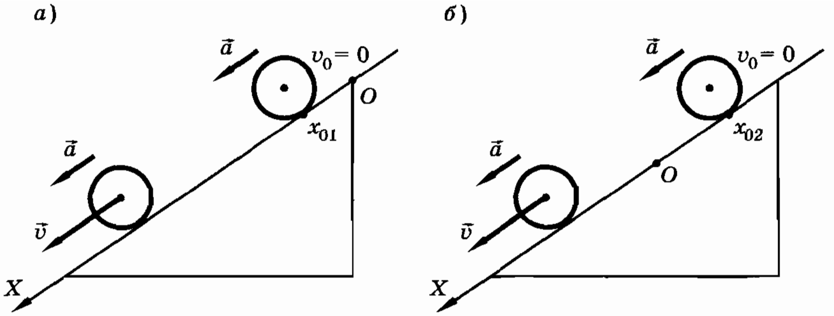


Рис. 1.59

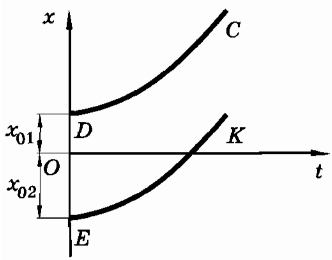


Рис. 1.60

ке 1.59, б, $x_{02} < 0$. Это движение графически описывается параболой *EK* (рис. 1.60). Оба движения являются равноускоренными.

Если ось *X* направить вверх по желобу (рис. 1.61, *а*, *б*), то движениям шара соответствуют графики *1* и *2* (рис. 1.62). Обратите внимание на следующую особенность всех графиков (см. рис. 1.58, 1.60, 1.62): они начинаются вершинами парабол ($v_0 = 0$), а далее идут все круче и круче, так как скорость возрастает, и за равные промежутки времени координата точки изменяется все быстрее и быстрее.

Графики равнозамедленного движения изображаются аналогично. В этом

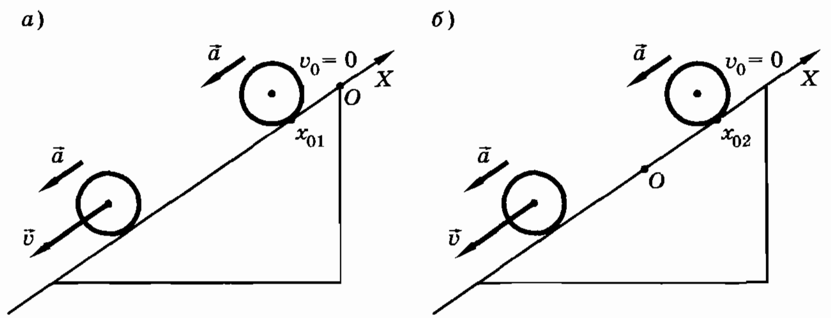


Рис. 1.61

случае тело имеет начальную скорость, направленную вверх вдоль желоба. Такое движение продолжится до остановки ($v = 0$). (После остановки шар начнет скатываться вниз и его движение станет равноускоренным.) Так как модуль скорости уменьшается, то $\vec{a}$ направлено противоположно $\vec{v}_0$, т. е. вниз вдоль желоба.

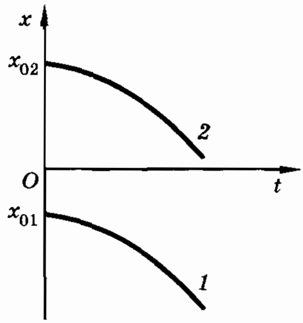


Рис. 1.62

Можно рассмотреть все случаи равнозамедленного движения в зависимости от выбора направления оси X и значения начальной координаты x_0. Так, движениям, изображенным на рисунке 1.63, *а*, *б*, соответствуют графики на рисунке 1.64, *а*, *б*.

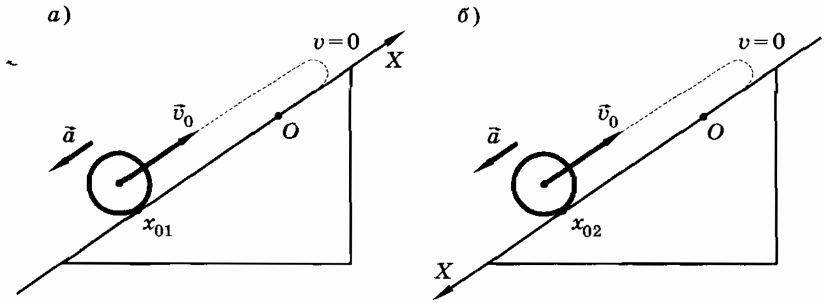


Рис. 1.63

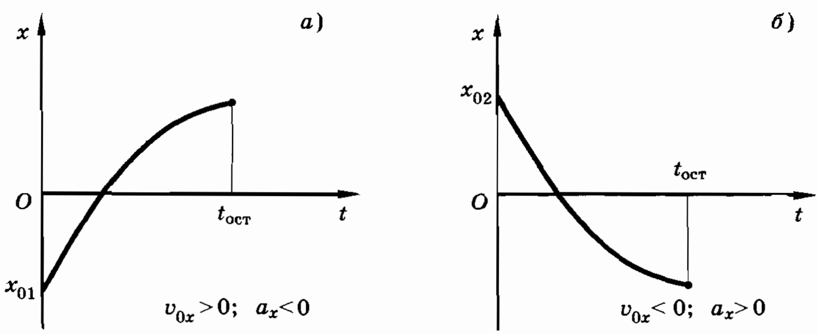


Рис. 1.64

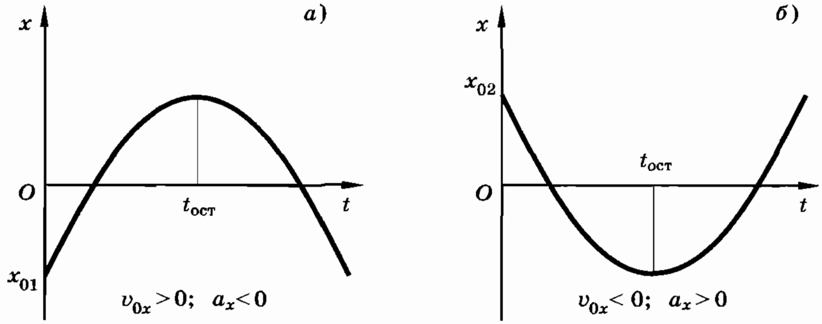


Рис. 1.65

Если мы будем рассматривать дальнейшие движения шаров после остановки, то получим полные графики их движения, которые изображены на рисунке 1.65, *а*, *б*. Действительно, шар имел начальную скорость, направленную вверх по желобу. Сначала он поднимается равнозамедленно, а потом начинает скатываться равноускоренно. Его координата (см. рис. 1.63, *а*) уменьшается по модулю до нуля, затем становится положительной, а далее вновь будет уменьшаться до нуля, после чего начинает принимать отрицательные значения (график изображен на рисунке 1.65, *а*). Для случая, соответствующего рисунку 1.63, *б*, имеем следующее: координата шара сначала уменьшается до нуля, затем принимает отрицательные значения, а потом (после остановки) начинает возрастать. График для этого движения изображен на рисунке 1.65, *б*.

Построение графиков зависимости координаты от времени при $\vec{a}$ = const ***сводится к построению отрезков парабол. Для лучшего усвоения этих графиков полезно повторить соответствующий раздел курса математики.***

§ 1.22. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Большинство задач на движение тел с постоянным ускорением решается в основном так же, как и задачи на равномерное прямолинейное движение (см. § 1.9). Однако вместо одного уравнения зависимости координаты от времени теперь будет два: для координаты и для проекции скорости в зависимости от времени:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2},$$
$$v_x = v_{0x} + a_x t. \qquad (1.22.1)$$

Задача 1

Конькобежец, разогнавшись до скорости $\upsilon_0 = 6$ м/с, начал скользить равнозамедленно. Спустя время $t = 30$ с модуль скорости конькобежца, движущегося прямолинейно, стал равен $\upsilon = 3$ м/с. Найдите ускорение конькобежца, считая его постоянным.

Решение. Совместим ось X с траекторией конькобежца. За положительное направление оси выберем направление вектора начальной скорости $\vec{\upsilon}_0$ (рис. 1.66). Так как конькобежец движется с постоянным ускорением, то $\upsilon_x = \upsilon_{0x} + a_x t$. Отсюда $a_x = \dfrac{\upsilon_x - \upsilon_{0x}}{t}$, где $\upsilon_x = \upsilon$ и $\upsilon_{0x} = \upsilon_0$, так как векторы $\vec{\upsilon}_0$ и $\vec{\upsilon}$ имеют такое же направление, что и ось X. Следовательно, $a_x = \dfrac{\upsilon - \upsilon_0}{t}$, $a_x = -0{,}1$ м/с^2 и $a = 0{,}1$ м/с^2. Знак «минус» указывает, что ускорение направлено противоположно оси X.

Задача 2

Бруску на гладкой наклонной плоскости сообщили начальную скорость $\upsilon_0 = 0{,}4$ м/с, направленную вверх. Брусок движется прямолинейно с постоянным ускорением, модуль которого $a = 0{,}2$ м/с^2. Найдите скорости бруска в моменты времени, равные 1, 2, 3 с от начала движения. Определите положение бруска в эти моменты времени относительно той точки, где брусок имел скорость υ_0. Чему равен путь, пройденный бруском за 3 с?

Решение. Ускорение бруска направлено вниз вдоль плоскости как при его подъеме, так и при спуске.

Совместим координатную ось с траекторией движения. За положительное направление оси X примем направление вектора начальной скорости $\vec{\upsilon}_0$. Начало координат выберем в той точке траектории, где брусок имел скорость $\vec{\upsilon}_0$ (рис. 1.67).

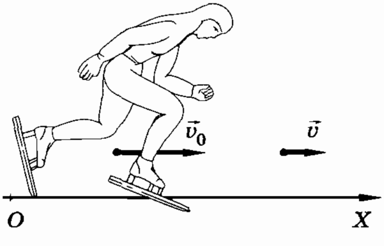


Рис. 1.66

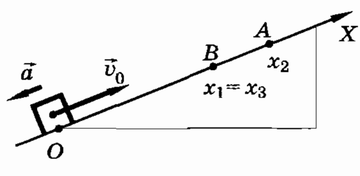


Рис. 1.67

Брусок движется с постоянным ускорением, поэтому $v_x = v_{0x} + a_x t$. Так как $v_{0x} = v_0$, $a_x = -a$, то $v_x = v_0 - at$. Эта формула справедлива для любого момента времени.

Найдем проекции и модули скоростей в указанные моменты времени:

$$v_{1x} = v_0 - at_1 = 0{,}2 \text{ м/с}, \qquad v_1 = |v_{1x}| = 0{,}2 \text{ м/с};$$
$$v_{2x} = v_0 - at_2 = 0, \qquad v_2 = 0;$$
$$v_{3x} = v_0 - at_3 = -0{,}2 \text{ м/с}, \qquad v_3 = |v_{3x}| = 0{,}2 \text{ м/с}.$$

Так как $v_{1x} > 0$, то скорость $\vec{v}_1$ направлена в ту же сторону, что и ось X. Знак «минус» у проекции v_{3x} указывает на то, что скорость $\vec{v}_3$ направлена в сторону, противоположную оси X. Так и должно быть, ведь после остановки ($v_2 = 0$) брусок начнет скользить вниз по плоскости.

Найдем положение бруска для заданных моментов времени:

$$x_1 = v_0 t_1 - \frac{at_1^2}{2} = 0{,}4 \text{ м} - \frac{0{,}2 \text{ м}}{2} = 0{,}3 \text{ м},$$

$$x_2 = v_0 t_2 - \frac{at_2^2}{2} = 0{,}8 \text{ м} - 0{,}4 \text{ м} = 0{,}4 \text{ м},$$

$$x_3 = v_0 t_3 - \frac{at_3^2}{2} = 1{,}2 \text{ м} - 0{,}9 \text{ м} = 0{,}3 \text{ м}.$$

Обратите внимание на то, что в точке B с координатой 0,3 м ($x_1 = x_3$) (см. рис. 1.67) тело было дважды (при подъеме и спуске). В эти же моменты времени тело имело скорости, равные по модулю ($v_1 = v_3$), но противоположные по направлению: $\vec{v}_1 = -\vec{v}_3$.

В точке A с координатой x_2 (см. рис. 1.67) скорость $v_2 = 0$. Здесь произошло изменение направления скорости. В момент времени $t_3 = 3$ с брусок находился в точке B с координатой x_3. Следовательно, пройденный бруском путь

$$s = OA + AB = 2x_2 - x_3 = 0{,}5 \text{ м}.$$

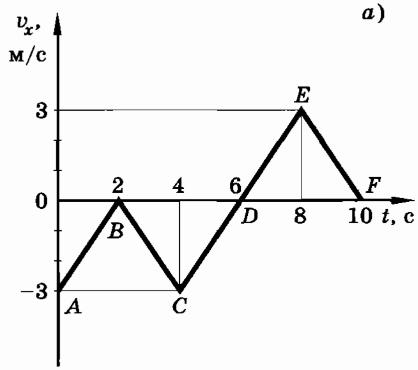
Задача 3

На рисунке 1.68, *а* изображен график зависимости проекции скорости точки от времени. Постройте график зависимости координаты от времени, если начальная координата $x_0 = 5$ м. Постройте график зависимости пути от времени.

Решение. Сначала построим график зависимости координаты от времени. Первые 2 с точка двигалась равнозамедленно противоположно оси X ($\upsilon_{1x} < 0$). Изменение координаты Δx_1 численно равно площади треугольника OAB. Поэтому координата к концу 2-й секунды равна: $x_1 = x_0 + \Delta x_1 = 5\text{ м} - 3\text{ м} = 2\text{ м}$. Графиком координаты на этом интервале времени является отрезок параболы A_1B_1 (рис. 1.68, *б*). Точка B_1 — вершина этой параболы.

В следующие 2 с движение было равноускоренным в том же направлении, что и вначале ($\upsilon_{2x} < 0$). Координата к концу 4-й секунды равна $x_2 = x_1 + \Delta x_2 = 2\text{ м} - 3\text{ м} = -1\text{ м}$. График — парабола B_1C_1.

От 4 до 6 с точка вновь двигалась равнозамедленно в прежнем направлении, поэтому $x_3 = x_2 + \Delta x_3 = -1\text{ м} - 3\text{ м} = -4\text{ м}$. График — парабола C_1D_1, где D_1 — ее вершина.



От 6 до 8 с точка двигалась равноускоренно в положительном направлении оси X ($\upsilon_{4x} > 0$). График — парабола D_1E_1. К концу 8-й секунды координата $x_4 = -4\text{ м} + 3\text{ м} = -1\text{ м}$. Далее точка двигалась равнозамедленно в том же направлении ($\upsilon_{5x} > 0$): $x_5 = -1\text{ м} + 3\text{ м} = 2\text{ м}$. График — парабола E_1F_1.

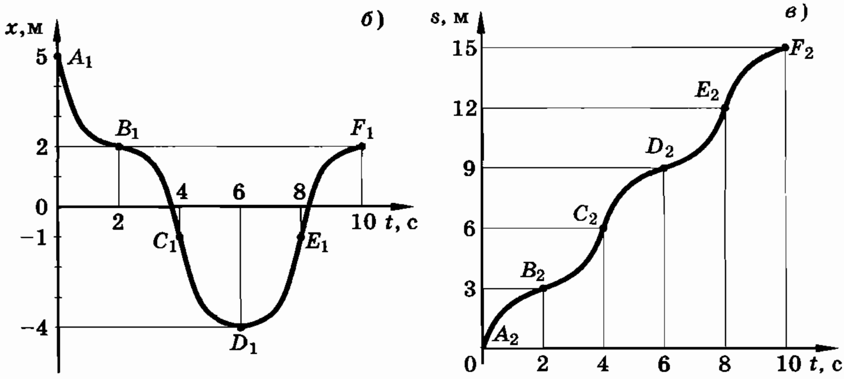


Рис. 1.68

При построении графика пути необходимо учесть, что путь — неотрицательная величина и не может уменьшаться в процессе движения.

График состоит из отрезков парабол A_2B_2, B_2C_2, C_2D_2, D_2E_2, E_2F_2 (рис. 1.68, *в*).

Упражнение 3

1. Небольшому кубику на гладкой наклонной плоскости сообщили начальную скорость $v_0 = 8$ м/с, направленную вверх. Кубик движется прямолинейно с постоянным ускорением, модуль которого $a = 2$ м/с^2. Найдите положение кубика относительно той точки плоскости, где кубику сообщена скорость $\vec{v}_0$, в моменты времени 2, 4, 6 с от начала движения, а также скорость кубика в те же моменты времени. Чему равен путь, пройденный кубиком за 5 с?

2. Два велосипедиста едут навстречу друг другу. Один из них с начальной скоростью 18 км/ч поднимается в гору равнозамедленно с постоянным ускорением, модуль которого 20 см/с^2. Другой велосипедист с начальной скоростью 5,4 км/ч спускается с горы с таким же по модулю ускорением. Через какое время они встретятся? На каком расстоянии от подножия горы произойдет встреча и какой путь пройдет каждый из них к этому моменту? Расстояние между велосипедистами в начальный момент времени было 195 м.

3. На рисунке 1.69 изображены графики I, II и III проекций скорости трех тел, движущихся прямолинейно. Охарактеризуйте особенности движения тел. Чему соответствует точка A пересечения графиков? Найдите модули ускорений тел. Запишите формулы для вычисления проекций скорости каждого тела.

4. Расстояние 20 км между двумя станциями поезд проходит со скоростью, средний модуль которой равен 72 км/ч, причем на разгон он тратит 2 мин, а затем идет с постоянной скоростью. На торможение до полной остановки поезд тратит 3 мин. Определите модуль максимальной скорости поезда.

5. Санки, скатывающиеся с горы, в первые 3 с проходят 2 м, а в последующие 3 с — 4 м. Считая движение равноускоренным, найдите модуль ускорения и модуль начальной скорости санок.

6. Тело, движущееся равноускоренно с начальной скоростью 1 м/с, приобретает, пройдя некоторое расстояние, скорость 7 м/с. Какова была скорость тела на середине этого расстояния?

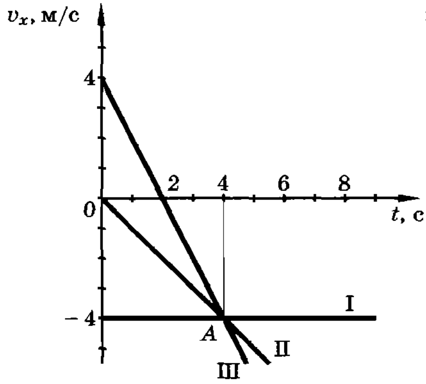


Рис. 1.69

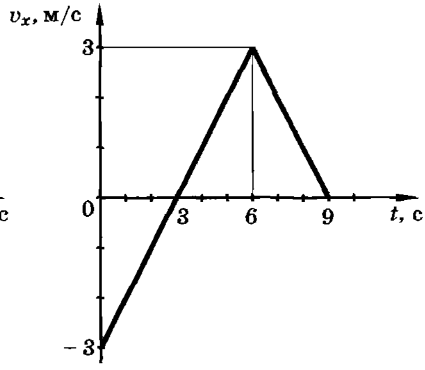


Рис. 1.70

7. По прямой начинает двигаться точка с постоянным ускорением. Спустя время t_1 после начала ее движения направление ускорения точки изменяется на противоположное, оставаясь неизменным по модулю. Определите, через какое время t_2 после начала движения точка вернется в исходное положение.

8. Вагонетка должна перевезти груз в кратчайший срок с одного места на другое, удаленное от первого на расстояние L. Она может увеличивать или уменьшать свою скорость только с одинаковым по модулю ускорением, равным a. Кроме того, она может двигаться с постоянной скоростью. Какой наибольшей по модулю скорости должна достигнуть вагонетка, чтобы было выполнено указанное выше условие?

9. На рисунке 1.70 приведен график зависимости проекции скорости точки, движущейся прямолинейно, от времени. Постройте график зависимости координаты от времени, если x_0 = 4,5 м. Постройте график зависимости пути от времени.

§ 1.23. СВОБОДНОЕ ПАДЕНИЕ

Наиболее распространенный вид движения с постоянным ускорением — свободное падение тел.

При падении любого тела на Землю из состояния покоя его скорость увеличивается. Ускорение, сообщаемое телам земным шаром, направлено вертикально вниз. Долгое время считали, что Земля сообщает разным телам различные ускорения. Простые наблюдения как будто подтверждают это. Птичье перо или лист бумаги падают гораздо медленнее, чем камень. Вот почему со времен Аристотеля (греческого ученого, жившего в IV в. до н. э.) считалось незыблемым мнение, что ускорение, сообщаемое Землей телу, тем больше, чем тяжелее тело.

Только Галилею удалось опытным путем доказать, что в действительности это не так. Нужно учитывать сопротивление воздуха. Именно оно искажает картину свободного падения тел, которую можно было бы наблюдать в отсутствие земной атмосферы.

Само понятие ускорения как строго определенной физической величины впервые было введено Галилеем.

Опыты Галилея

Вначале Галилей установил, что свободное падение является равноускоренным движением. Падение тел происходит очень быстро. Поэтому для исследования движения необходимо измерять очень малые промежутки времени. В те времена это делать не умели. Галилей догадался, что можно как бы замедлить свободное падение, изучая скатывание шаров по наклонному желобу. При этом он получил формулу для вычисления пути $s = \frac{at^2}{2}$.

Галилей обнаружил, что шары одинакового диаметра, изготовленные из дерева, золота, слоновой кости, движутся по желобу с одинаковыми ускорениями $a = \frac{2s}{t^2}$. Итак, ускорения не зависят от массы шаров!

Далее ученый обнаружил, что с увеличением наклона желоба модуль ускорения увеличивается, но остается одинаковым для тел различных масс. Свободному падению соответствует движение по вертикально поставленному желобу. Следовательно, тела должны падать с одинаковым ускорением, не зависящим от их массы.

Для проверки своего предположения Галилей, по преданию, наблюдал падение со знаменитой наклонной Пизанской башни (рис. 1.71) различных тел (пушечное ядро, мушкетная пуля и т. д.). Все эти тела достигали поверхности Земли практически одновременно. Таким образом, Галилей впервые доказал, что земной шар сообщает всем телам вблизи поверхности Земли одно и то же ускорение.

Впоследствии были созданы вакуумные насосы, которые позволили осуществить действительно свободное падение тел.

Свободным падением называется движение тела только под влиянием притяжения к Земле.

Опыт Ньютона

Особенно прост и убедителен опыт с так называемой трубкой Ньютона. В стеклянную трубку помещают различные предметы: дробинки, кусочки пробки, пушинки и т. д. Если теперь перевернуть трубку так, чтобы эти предметы могли падать, то быстрее всего промелькнет дробинка, за ней кусочки пробки и, наконец, плавно опустится пушинка (рис. 1.72, *а*). Но если выкачать из трубки воздух, то все произойдет совершенно иначе: пушинка будет падать, не отставая от дробинки и пробки (рис. 1.72, *б*)! Значит, ее движение задерживалось сопротивлением воздуха, которое в меньшей степени сказывалось на движении, например, пробки. Когда же на эти тела действует только притяжение к Земле, то все они падают с одним и тем же ускорением. Конечно, на основании данного опыта еще нельзя утверждать, что ускорение всех тел под действием притяжения Земли строго одинаково. Но и более точные опыты,

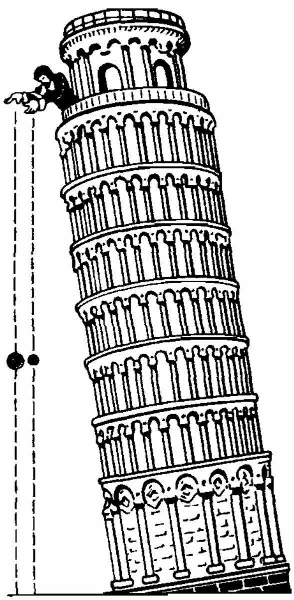
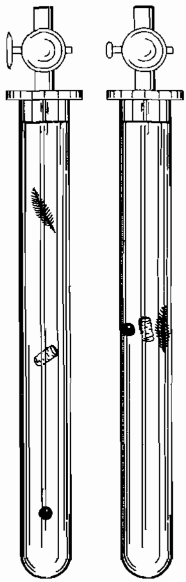


Рис. 1.71



а)　　*б*)

Рис. 1.72

проведенные с помощью самой совершенной современной экспериментальной техники, приводят к таким же результатам.

Итак, земной шар сообщает всем без исключения телам одно и то же ускорение. Если сопротивление воздуха отсутствует, то вблизи поверхности Земли ускорение падающего тела постоянно.

Ускорение свободного падения

Ускорение, сообщаемое всем телам земным шаром, называют **ускорением свободного падения**. Его модуль мы будем обозначать буквой g. Свободное падение не обязательно представляет собой движение вниз. Если начальная скорость направлена вверх, то тело при свободном падении некоторое время будет лететь вверх, уменьшая свою скорость, и лишь затем начнет падать вниз.

Ускорение свободного падения несколько изменяется в зависимости от географической широты места на поверхности Земли. (Причины этого будут выяснены дальше.) Но в одном и том же месте оно одинаково для всех тел[1].

На широте Москвы измерения дают следующее значение ускорения свободного падения: $g = 9{,}82$ м/с^2. Вообще же на поверхности Земли значение g меняется в пределах от 9,78 м/с^2 на экваторе до 9,83 м/с^2 на полюсе. Впрочем, при решении многих задач можно считать ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли равным 9,8 м/с^2 или даже 10 м/с^2.

При падении тел в воздухе на их движение влияет сопротивление воздуха. Поэтому ускорение тел не равно g. Но когда движутся сравнительно массивные тела с небольшими скоростями (камень, спортивное ядро и т. д.), сопротивление воздуха влияет незначительно и движение тел можно рассматривать как свободное падение. Лишь при больших скоростях (снаряд, пуля и т. д.) сопротивление воздуха существенно и его влиянием нельзя пренебречь.

Свободное падение без начальной скорости

Так как свободное падение совершается с постоянным ускорением, то любую задачу на свободное падение можно решить с помощью формул (1.17.3) и (1.19.2).

---

[1] На самом деле g незначительно меняется и в зависимости от высоты над уровнем моря.

Пусть тело свободно падает с высоты h без начальной скорости ($v_0 = 0$) (рис. 1.73). Тогда $y_0 = h$, $v_{0y} = 0$, $v_y = -v$, $a_y = -g$ и формула $v_y = v_{0y} + a_y t$ примет вид:

$$v = gt, \qquad (1.23.1)$$

а формула (1.19.2) запишется так:

$$y = h - \frac{gt^2}{2}.$$

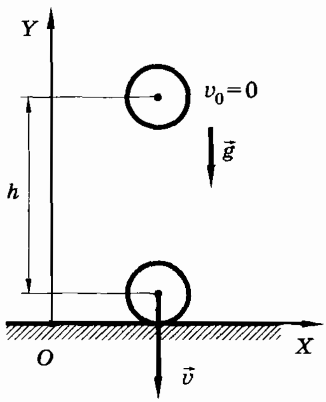


Рис. 1.73

В момент падения тела на землю $y = 0$ и поэтому высота падения связана со временем падения формулой:

$$h = \frac{gt^2}{2}. \qquad (1.23.2)$$

Из формул (1.23.1) и (1.23.2) следует

$$v = \sqrt{2gh}. \qquad (1.23.3)$$

Эта формула выражает зависимость скорости тела от высоты падения.

При свободном падении все тела движутся с одним и тем же постоянным ускорением. Ускорение свободного падения направлено вертикально вниз; его модуль равен $g \approx 9{,}8$ м/с^2.

§ 1.24. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА, БРОШЕННОГО ПОД УГЛОМ К ГОРИЗОНТУ

Рассмотрим движение тела, брошенного под углом к горизонту. Такое движение совершают, например, футбольный мяч, артиллерийский снаряд. Если сопротивление воздуха не учитывать, то эти движения представляют собой свободное падение.

Траектория

Пусть тело в начальный момент времени находилось на высоте h и имело скорость $\vec{v}_0$, направленную под углом α к горизонту (рис. 1.74, *а*).

Ось Y направим вертикально вверх, а ось X — горизонтально так, чтобы векторы начальной скорости $\vec{v}_0$ и ускорения свободного падения $\vec{g}$ лежали в плоскости XOY.

Так как тело движется с постоянным ускорением $\vec{g}$, то для описания его движения можно воспользоваться уравнениями (1.17.3) и (1.19.2).

Запишем начальные условия движения тела в соответствии с выбранной системой координат: при $t = 0$ $x_0 = 0$, $y_0 = h$, $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$. Кроме того, $a_x = 0$, $a_y = -g$.

Теперь формулы проекций скорости (1.17.3) и уравнения координат (1.19.2) примут вид:

$$v_x = v_0 \cos \alpha, v_y = v_0 \sin \alpha - gt, \qquad (1.24.1)$$

$$x = v_0(\cos \alpha)t, y = h + v_0(\sin \alpha)t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (1.24.2)$$

Найдем уравнение траектории тела. Для этого из уравнений (1.24.2) исключим время. Из первого уравнения получим

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}.$$

Подставляя это выражение во второе уравнение (1.24.2), получим:

$$y = h + x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \qquad (1.24.3)$$

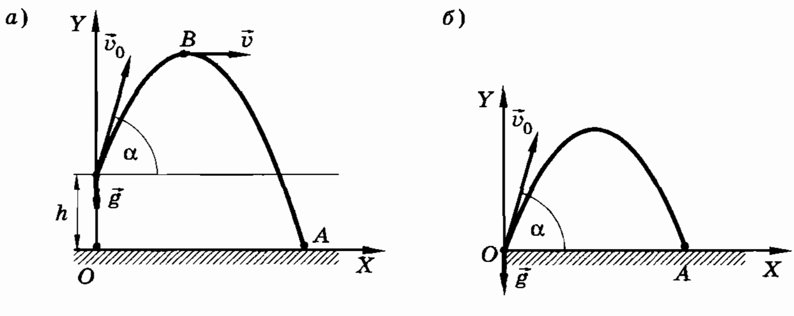


Рис. 1.74

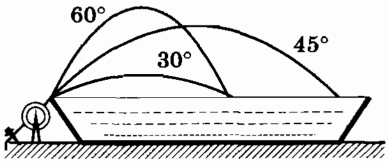


Рис. 1.75

Из курса математики известно, что графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола. В нашем случае

$$a = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha},\ b = \operatorname{tg}\alpha,\ c = h.$$

Таким образом, траекторией тела, брошенного под углом к горизонту, является парабола, проходящая через точку, из которой брошено тело. Ветви параболы направлены вниз, так как коэффициент при x^2 отрицателен. Очевидно, что вершина параболы находится в наивысшей точке подъема тела (точка B на рисунке 1.74, *а*).

Наблюдать такую траекторию можно с помощью струи воды, вытекающей под напором из трубки (рис. 1.75). Струя принимает форму параболы, так как каждая частица воды движется по параболе, подобно шарику, брошенному под углом к горизонту. В этом легко убедиться, поставив за струями экран с заранее начерченными параболами. При определенной скорости истечения воды струя будет идти вдоль начерченной параболы. Изменив скорость истечения и угол наклона трубки, можно направить струю вдоль другой параболы.

Время подъема тела и время полета

Время подъема нетрудно определить с помощью второго уравнения (1.24.1). В наивысшей точке подъема вектор скорости $\vec{v}$ параллелен оси X и перпендикулярен оси Y. Следовательно, проекция скорости $\vec{v}$ на ось Y равна нулю ($v_y = 0$). Поэтому

$$v_0\sin\alpha - gt_{\text{под}} = 0.$$

Отсюда

$$t_{\text{под}} = \frac{v_0\sin\alpha}{g}. \qquad (1.24.4)$$

Время полета тела от точки бросания до точки падения определяется вторым уравнением (1.24.2) для координаты y. В конце полета $y = 0$. Следовательно,

$$h + v_0 t_{\text{пол}} \sin\alpha - \frac{g t_{\text{пол}}^2}{2} = 0.$$

Отсюда[1]

$$t_{\text{пол}} = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g}. \qquad (1.24.5)$$

Если $h = 0$, т. е. тело брошено с поверхности Земли (см. рис. 1.74, *б*), то

$$t_{\text{пол}} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}. \qquad (1.24.6)$$

Время падения по нисходящей части траектории равно:

$$t_{\text{пад}} = t_{\text{пол}} - t_{\text{под}}.$$

При $h = 0$ имеем

$$t_{\text{пад}} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}. \qquad (1.24.7)$$

Сравнивая формулы (1.24.4), (1.24.6), (1.24.7), заключаем, что время подъема и время падения при $h = 0$ равны между собой и в 2 раза меньше времени полета.

Дальность полета

Найдем горизонтальную дальность полета, т. е. длину отрезка OA (см. рис. 1.74, *б*). Для этого в уравнение (1.24.2) для координаты x надо подставить время полета (1.24.5) или (1.24.6). Если $h = 0$, то дальность полета равна:

$$l = OA = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \qquad (1.24.8)$$

Очевидно, что при данном модуле v_0 начальной скорости бросания тела дальность полета будет наибольшей, когда $\sin 2\alpha = 1$, т. е. при $\alpha = 45°$.

---

[1] Так как $t_{\text{пол}} > 0$, то второй отрицательный корень уравнения надо отбросить.

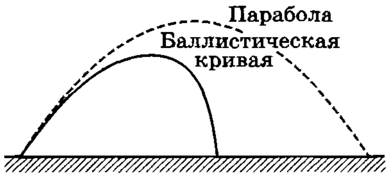


Рис. 1.76

Однако при движении тела в воздухе наибольшая дальность полета достигается при несколько меньшем угле. При стрельбе из орудий нельзя пренебрегать сопротивлением воздуха, так как скорости полета снарядов велики. При таких скоростях влияние среды на движущееся тело становится особо заметным. Тело движется по несимметричной — баллистической[1] кривой (рис. 1.76), которая в своей нисходящей ветви значительно круче параболы. Так, для угла $\alpha = 20°$ при вылете из орудия калибра 76 мм реальная дальность полета составляет 7200 м вместо 23 600 м при отсутствии сопротивления воздуха (рис. 1.77).

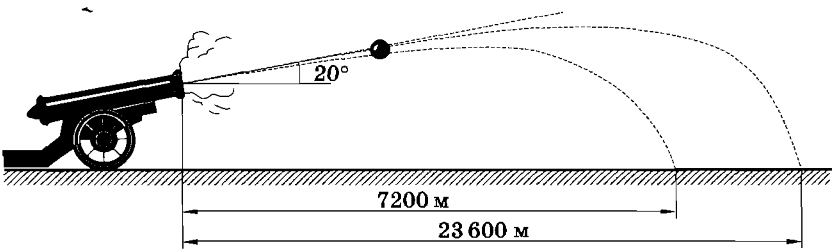


Рис. 1.77

Так как $\sin 2\alpha = \sin(\pi - 2\alpha)$, то, положив $\pi - 2\alpha = 2\beta$, найдем, что для угла $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$. Отсюда видно, что при углах бросания α и β, составляющих в сумме 90°, горизонтальная дальность полета одинакова (настильная и навесная стрельба).

Полученные результаты о максимальной дальности полета и одинаковой дальности полета при углах α и β можно наблюдать с помощью водяных струй (см. рис. 1.75).

[1] От греческого слова ballō — бросаю. Баллистика — наука о движении снарядов внутри и вне ствола орудия, неуправляемых ракет и т. п.

Наибольшая высота подъема

Наибольшую высоту подъема можно определить из второго уравнения системы (1.24.2), подставив в него время подъема (1.24.4):

$$y_{max} = h + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \qquad (1.24.9)$$

Если бросание происходит с поверхности Земли ($h = 0$), то

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \qquad (1.24.10)$$

Наибольшая высота подъема пропорциональна квадрату начальной скорости и возрастает с увеличением угла бросания.

Частные случаи движения тела, брошенного под углом к горизонту

1. Если угол $\alpha = 0$, то начальная скорость $\vec{v}_0$ направлена горизонтально вдоль оси X. Это случай движения тела, брошенного горизонтально (рис. 1.78). Решается эта задача с помощью уравнений (1.24.1) и (1.24.2). Траекторией является парабола с вершиной в точке бросания.

Но здесь имеется один любопытный момент: время полета получается таким же, как и при свободном падении тела с той же высоты при $v_0 = 0$. Действительно, из уравнения (1.24.5) для $\alpha = 0$ следует:

$$t_{пол} = \frac{\sqrt{2gh}}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

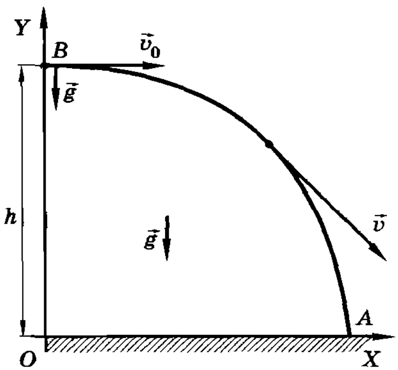


Рис. 1.78

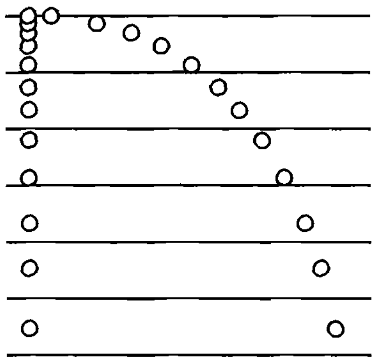


Рис. 1.79

Этот результат совпадает с выражением для времени, полученным из формулы (1.23.2).

Наглядное представление о траектории тела, брошенного горизонтально, например стального шарика, можно получить, если сфотографировать шарик, освещая его во время падения кратковременными вспышками света, следующими друг за другом через одинаковые интервалы. Полученная таким образом картина движения шарика представлена на рисунке 1.79. *Слева для сравнения* показаны положения шарика, начавшего падать вниз без начальной скорости в тот момент, когда началось движение шарика, брошенного горизонтально. Обратите внимание на то, что оба шарика в любой момент времени находятся на одной высоте. Это означает, что их координаты y меняются со временем совершенно одинаково. На изменение координаты y не оказывает никакого влияния смещение шарика в горизонтальном направлении вдоль оси X.

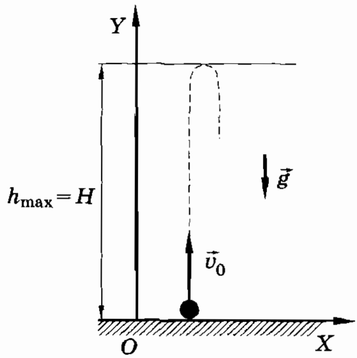


Рис. 1.80

2. Если угол $\alpha = 90°$, то вектор начальной скорости $\vec{v}_0$ направлен вертикально вверх (рис. 1.80). Сначала тело движется равнозамедленно вверх, достигает максимальной высоты h_{max}, а затем падает вниз равноускоренно.

Данная задача полностью решается с помощью тех же уравнений (1.24.1) и (1.24.2). Но в этом случае достаточно формул *для проекции скорости* v_y и координаты y.

3. Если угол $\alpha = 270°$, то вектор начальной скорости $\vec{v}_0$ направлен вертикально вниз. Тело будет свободно падать с высоты h, имея начальную скорость $\vec{v}_0$. Движение тела происходит равноускоренно по вертикали.

4. Если $v_0 = 0$, то тело будет свободно падать с высоты h без начальной скорости (см. § 1.23).

Тело, брошенное под углом к горизонту, движется по параболе, если не учитывать сопротивление воздуха. Знная ускорение свободного падения и начальную скорость, можно вычислить дальность и время полета.

§ 1.25. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Свободно падающее тело за последнюю секунду падения прошло $\frac{1}{3}$ своего пути. Найдите время падения t и высоту h, с которой упало тело.

Решение. Для решения задачи воспользуемся формулой

$$h = \frac{gt^2}{2}.$$

Согласно условию задачи, $\Delta h = h - h_1$, где h_1 — путь тела при свободном падении за время $t_1 = t - \tau$ ($\tau = 1$ с). Тогда можно записать:

$$h_1 = \frac{g(t-\tau)^2}{2}.$$

Кроме того,

$$\frac{h}{3} = h - h_1 \quad \text{или} \quad \frac{g(t-\tau)^2}{2} = \frac{gt^2}{3}.$$

Отсюда

$$t = \frac{\sqrt{3}\tau}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \approx 5{,}4 \text{ с}.$$

Тело упало с высоты $h = \frac{g}{2}\frac{3\tau^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} = (5 \cdot 5{,}4^2)$ м ≈ 146 м.

Задача 2

Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с. Какой путь прошло тело за 3 с полета? Найдите модуль и направление скорости в конце этого промежутка времени.

Решение. Чтобы найти скорость $\vec{v}$, воспользуемся формулой для проекции скорости v_y: $v_y = v_{0y} + a_y t$. Ось Y направим вертикально вверх (см. рис. 1.80). Тогда $v_y = v_0 - gt = -10$ м/с. Модуль скорости $v = 10$ м/с. Так как проекция скорости отрицательна, то скорость $\vec{v}$ направлена противоположно направлению оси Y, т. е. вниз.

Направление скорости тела изменилось, поэтому пройденный путь будет складываться из максимальной высоты подъема $h_{max} = H$ и участка траектории $H - y$, на который опустилось тело:

$$s = H + (H - y) = 2H - y.$$

Время подъема на максимальную высоту можно определить из условия $v_y = 0$. Отсюда

$$t_{под} = \frac{v_0}{g} = 2 \text{ с}.$$

Максимальная высота подъема

$$H = v_0 t_{под} - \frac{g t_{под}^2}{2} = 20 \text{ м}.$$

Найдем координату тела y спустя время $t = 3$ с после начала движения:

$$y = v_0 t - \frac{g t^2}{2} = 15 \text{ м}.$$

Пройденный телом путь

$$s = 2H - y = 25 \text{ м}.$$

Задача 3

С башни высотой $h = 10$ м в горизонтальном направлении бросают камень со скоростью $v_1 = 23$ м/с. Одновременно с поверхности Земли под углом $\alpha = 30°$ к горизонту бросают второй камень со скоростью $v_2 = 20$ м/с навстречу первому. Определите, на каком расстоянии l от подножия башни находится точка бросания второго камня, если камни столкнулись в воздухе.

Решение. Выберем систему координат XOY так, чтобы скорости бросания камней лежали в этой плоскости. Начало координат расположим на поверхности Земли. Ось Y направим вверх так, чтобы она проходила через точку бросания первого камня. Ось X направим вправо (рис. 1.81).

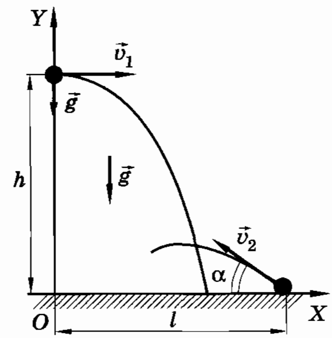


Рис. 1.81

Координата y в зависимости от времени меняется следующим образом:

$$y = y_0 + v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2}.$$

В соответствии с условием задачи и рисунком 1.81 уравнения координат первого и второго тел можно записать так:

$$y_1 = h - \frac{gt^2}{2} \text{ и } y_2 = v_2 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

В момент встречи тел: $y_1 = y_2$, или

$$h - \frac{gt^2}{2} = v_2 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

Отсюда

$$t = \frac{h}{v_2 \sin\alpha}. \qquad (1.25.1)$$

Теперь воспользуемся формулой зависимости координаты x от времени:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Согласно условию задачи и в соответствии с выбранной системой координат XOY:

$$x_1 = v_1 t \text{ и } x_2 = l - v_2 t\cos\alpha.$$

При столкновении камней $x_1 = x_2$, или $v_1 t = l - v_2 t\cos\alpha$.

Отсюда

$$l = (v_1 + v_2\cos\alpha)t.$$

Заменяя в этой формуле время выражением (1.25.1), получим

$$l = (v_1 + v_2\cos\alpha)\frac{h}{v_2\sin\alpha} = 40{,}4 \text{ м}.$$

Упражнение 4

1. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью 30 м/с. Через какой промежуток времени оно будет на высоте 25 м?
2. К стене на нити подвешена линейка длиной 25 см. Под линейкой в стене имеется маленькое отверстие. На какой высоте h над отверстием должен находиться нижний край линейки, если после пережигания нити линейка, свободно падая, закрывала собой отверстие в течение 0,1 с? Ускорение свободного падения принять равным $g = 9{,}8$ м/с^2.
3. С какой высоты упало тело, если в последнюю секунду падения оно прошло путь, равный 75 м?
4. Воздушный шар поднимается вверх без начальной скорости с постоянным ускорением и за 20 с достигает высоты 200 м. Спустя

10 с после начала движения от шара без толчка отделился балласт. Через какое время балласт достигнет земли?

5. Брошенное вертикально вверх тело на высоте 25 м побывало дважды с интервалом времени 4 с. Определите модуль начальной скорости тела, а также модули и направления скоростей тела на высоте 25 м.

6. Два тела брошены вертикально вверх из одной точки одно вслед за другим с интервалом времени, равным τ, с одинаковыми скоростями $\vec{v}_0$. Через какое время после бросания первого тела они встретятся?

7. Камень брошен горизонтально. Через 3 с его скорость оказалась направленной под углом 45° к горизонту. Найдите модули начальной скорости и скорости тела спустя 3 с.

8. Тело брошено с поверхности Земли под углом 30° к горизонту. Найдите модуль начальной скорости, если на высоте 10 м тело побывало дважды с интервалом времени 1 с.

9. Тело брошено под углом 60° к горизонту с начальной скоростью 21 м/с. На какой высоте вектор скорости будет составлять с горизонтом угол 30°?

10. С высоты H на наклонную плоскость, образующую угол α с горизонтом, свободно падает мяч и упруго отражается[1] с той же по модулю скоростью. Найдите расстояние от места первого соударения до второго; затем от второго до третьего и т. д. Определите расстояние между первым и вторым соударениями для случая, когда $\alpha = 45°$ и $H = 0{,}5$ м.

11. Из шланга, лежащего на земле, бьет под углом 30° к горизонту вода с начальной скоростью 10 м/с. Площадь сечения отверстия шланга равна 2 см^2. Определите массу струи, находящейся в воздухе. Плотность воды 1000 кг/м^3.

12. Два тела брошены одновременно из одной точки: одно вертикально вверх, другое — под углом 60° к горизонту. Начальная скорость каждого тела $v_0 = 25$ м/с. Найдите расстояние между телами спустя время $t = 1{,}7$ с.

13. С поверхности Земли одновременно бросают два тела: одно вертикально вверх, второе — под углом к горизонту. Найдите угол, под которым бросили второе тело, если оба тела упали одновременно, причем высота подъема тела, брошенного вертикально вверх, равна расстоянию, на котором второе тело упало от точки бросания.

---

[1] «Упруго отражается» — это значит, что угол падения мяча равен углу отражения. Углы падения и отражения — это углы, образованные векторами скорости мяча до и после удара о плоскость и перпендикуляром к плоскости в точке удара мяча.

§ 1.26. РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПО ОКРУЖНОСТИ. ЦЕНТРОСТРЕМИТЕЛЬНОЕ УСКОРЕНИЕ

Характерные особенности этого движения содержатся в его названии: равномерное — значит с постоянной по модулю скоростью (v = const), *по окружности — значит траектория — окружность.*

Равномерное движение по окружности

До сих пор мы изучали движения с постоянным ускорением. Однако чаще встречаются случаи, когда ускорение изменяется.

Вначале мы рассмотрим простейшее движение с переменным ускорением, когда модуль ускорения не меняется. Таким движением, в частности, является равномерное движение точки по окружности: за любые равные промежутки времени точка проходит дуги одинаковой длины. При этом скорость тела (точки) не изменяется по модулю, а меняется лишь по направлению.

Мы по-прежнему будем считать тело настолько малым, что его можно рассматривать как точку. Для этого размеры тела должны быть малы по сравнению с радиусом окружности, по которой движется тело.

Среднее ускорение

Пусть точка в момент времени t занимает на окружности положение A, а через малый интервал времени Δt — положение A_1 (рис. 1.82, *а*). Обозначим скорость точки в этих положениях через $\vec{v}$ и $\vec{v}_1$. При равномерном движении $v_1 = v$.

Для нахождения мгновенного ускорения сначала найдем среднее ускорение точки. Изменение скорости за время Δt равно $\Delta\vec{v}$ и $= \vec{v}_1 - \vec{v}$ (см. рис. 1.82, *а*).

По определению среднее ускорение равно

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Центростремительное ускорение

Задачу нахождения мгновенного ускорения разобьем на две части: сначала найдем модуль ускорения, а потом его направление. За время Δt точка A совершит перемещение $\overrightarrow{AA_1} = \Delta\vec{r}$.

Рассмотрим треугольники OAA_1 и A_1CB (см. рис. 1.82, *а*). Углы при вершинах этих равнобедренных треугольников равны, так как соответствующие стороны перпендикулярны. Поэтому треугольники подобны. Следовательно,

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{r}.$$

Разделив обе части равенства на Δt, перейдем к пределу при стремлении интервала времени $\Delta t \to 0$:

$$\frac{1}{v}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{1}{r}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}. \qquad (1.26.1)$$

Предел в левой части равенства есть модуль мгновенного ускорения, а предел в правой части равенства представляет собой модуль мгновенной скорости точки. Поэтому равенство (1.26.1) примет вид:

$$\frac{1}{v}a = \frac{1}{r}v.$$

Отсюда

$$\boxed{a = \frac{v^2}{r}.} \qquad (1.26.2)$$

Очевидно, что модуль ускорения при равномерном движении точки по окружности есть постоянная величина, так как v и r не изменяются при движении.

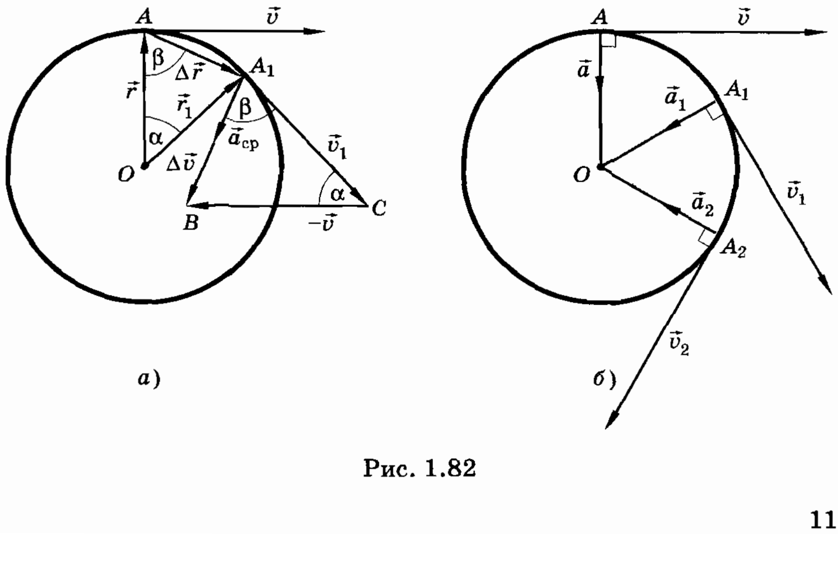


Рис. 1.82

Направление ускорения

Найдем направление ускорения $\vec{a}$. Из треугольника A_1CB следует, что вектор среднего ускорения составляет с вектором скорости угол $\beta = \frac{180° - \alpha}{2}$. Но при $\Delta t \to 0$ точка A_1 бесконечно близко подходит к точке A и угол $\alpha \to 0$. Следовательно, вектор мгновенного ускорения составляет с вектором скорости угол

$$\beta = \lim_{\alpha \to 0} \frac{180° - \alpha}{2} = 90°.$$

Значит, вектор мгновенного ускорения $\vec{a}$ направлен к центру окружности (рис. 1.82, *б*). Поэтому это ускорение называется центростремительным (или нормальным[1]).

Центростремительное ускорение на карусели и в ускорителе элементарных частиц

Оценим ускорение человека на карусели. Скорость кресла, в котором сидит человек, составляет 3—5 м/с. При радиусе карусели порядка 5 м центростремительное ускорение $a = \frac{v^2}{r} \approx$ $\approx$ 2—5 м/с^2. Это значение довольно близко к ускорению свободного падения 9,8 м/с^2.

А вот в ускорителях элементарных частиц скорость оказывается довольно близкой к скорости света $3 \cdot 10^8$ м/с. Частицы движутся по круговой орбите радиусом в сотни метров. При этом центростремительное ускорение достигает огромных значений: 10^{14}—10^{15} м/с^2. Это в 10^{13}—10^{14} раз превышает ускорение свободного падения.

Равномерно движущаяся по окружности точка имеет постоянное по модулю ускорение $a = \frac{v^2}{r}$, направленное по радиусу к центру окружности (перпендикулярно скорости). Поэтому это ускорение называется центростремительным или нормальным.

Ускорение $\vec{a}$ при движении непрерывно изменяется по

---

[1] От латинского слова normalis — прямой. Нормаль к кривой линии в данной точке — прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно к касательной, проведенной через ту же точку.

направлению (см. рис. 1.82, *б*). *Значит, равномерное движение точки по окружности является движением с переменным ускорением.*

§ 1.27. ТАНГЕНЦИАЛЬНОЕ, НОРМАЛЬНОЕ И ПОЛНОЕ УСКОРЕНИЯ

Когда точка движется произвольно, то ее скорость изменяется как по направлению, так и по модулю. В этом случае очень удобно полное ускорение разложить на составляющие по направлению скорости и перпендикулярно к ней.

Ускорение при неравномерном криволинейном движении

Пусть в некоторый момент времени t точка занимает положение A (рис. 1.83, *а*) и имеет скорость $\vec{v}_1$, а спустя малое время Δt точка переместилась в положение B, приобретя скорость $\vec{v}_2$.

Разложим вектор изменения скорости $\Delta\vec{v}$ на составляющие $\Delta\vec{v}_\tau$ и $\Delta\vec{v}_n$ (рис. 1.83, *б*). Первая составляющая направлена по скорости $\vec{v}_1$, т. е. по касательной к траектории, проведенной в точке A. Она называется тангенциальной (касательной) составляющей вектора $\Delta\vec{v}$. Составляющая $\Delta\vec{v}_n \perp \vec{v}_1$. Поэтому $\Delta\vec{v}_n$ называется нормальной составляющей приращения скорости $\Delta\vec{v}$. По правилу сложения векторов

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\tau + \Delta\vec{v}_n.$$

Разделим почленно это равенство на Δt и перейдем к пределу при стремлении $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}. \qquad (1.27.1)$$

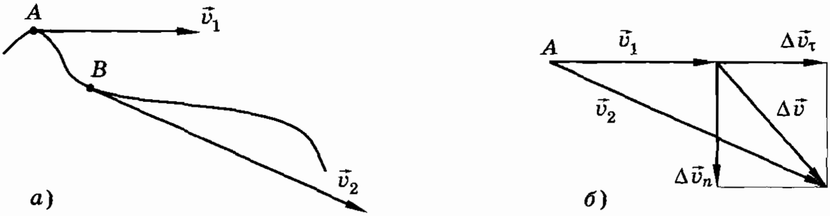


Рис. 1.83

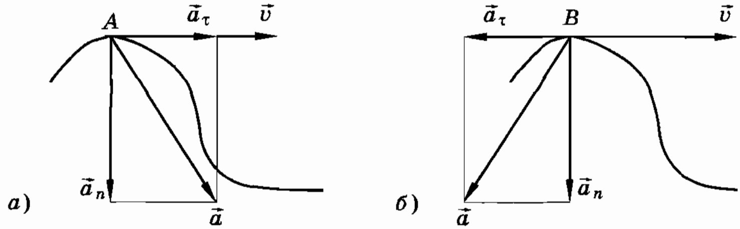


Рис. 1.84

Каждое слагаемое этого равенства есть составляющая ускорения (см. § 1.15). Левая часть равенства (1.27.1) является полным ускорением точки. Первое слагаемое в правой части называется тангенциальным (касательным) ускорением, второе слагаемое — уже знакомое нам нормальное ускорение.

Тангенциальное ускорение направлено по касательной к траектории, так как $\vec{a}_\tau \uparrow\uparrow \vec{v}$. При ускоренном движении точки (модуль скорости возрастает) касательное ускорение имеет то же направление, что и скорость. При замедленном движении оно направлено противоположно скорости. *Тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения модуля скорости. Нормальное ускорение $\vec{a}_n$ перпендикулярно скорости и характеризует быстроту изменения направления скорости.*

Полное ускорение точки равно сумме тангенциального и нормального ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \qquad (1.27.2)$$

На рисунке 1.84, *а* изображен случай ускоренного движения, а на рисунке 1.84, *б* — замедленного движения точки.

Модуль нормального ускорения

Мы нашли, как направлены тангенциальное и нормальное ускорения. Выражение для модуля нормального ускорения при движении по окружности радиусом r нам известно:

$$a_n = \frac{v^2}{r}. \qquad (1.27.3)$$

Если движение происходит вдоль произвольной кривой, то под r надо понимать радиус кривизны траектории в данной точке. Выясним, что такое радиус кривизны кривой линии в точке. Выберем на кривой AB вблизи точки M с обеих сторон от нее еще две точки: K и L (рис. 1.85). Через три точки K, M и L можно провести единственную окружность. Если точки K и L приближать к точке M, каждый раз проводя через эти три точки окружность, то мы получим серию окружностей разных радиусов, дуги которых вблизи точки M все меньше и меньше будут отличаться от кривой AB.

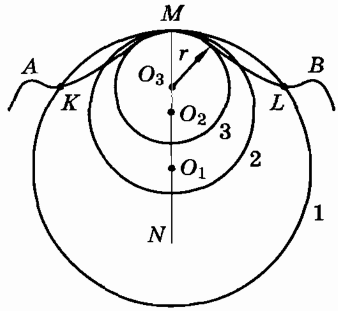


Рис. 1.85

В пределе, когда точки K и L сколь угодно близко подходят к точке M, радиус проходящей через них окружности также стремится к предельному значению. Это предельное значение радиусов окружностей и называется радиусом кривизны кривой AB в точке M.

Модуль тангенциального и полного ускорений

Модуль тангенциального ускорения равен

$$|\vec{a}_\tau| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{v}_\tau|}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}, \qquad (1.27.4)$$

где dv — приращение модуля скорости за бесконечно малый интервал времени dt. Модуль полного ускорения $\vec{a}$ точки можно найти по теореме Пифагора (см. рис. 1.84, *а*, *б*):

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \qquad (1.27.5)$$

Полное ускорение направлено по секущей в сторону вогнутости траектории.

Классификация движений

По значениям, которые принимают нормальное и тангенциальное ускорения, можно классифицировать различные движения точки.

Если $a_n = 0$, то при любых значениях скорости движение точки происходит по прямой линии. Эту прямую можно рассматривать как окружность бесконечно большого радиуса ($r \to \infty$).

Если $a_\tau = 0$ и $a_n = 0$, но скорость отлична от нуля, то движение по прямой будет равномерным, так как не меняется модуль скорости.

В случае $a_n \neq 0$ движение точки криволинейное, так как меняется направление скорости. Когда $a_n \neq 0$, $a_\tau = 0$, то при движении по кривой линии модуль скорости точки не изменяется — точка движется равномерно.

Если $a_\tau = 0$, $a_n = \text{const}$, то точка совершает равномерное движение по окружности.

И наконец, когда оба ускорения $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ отличны от нуля, то точка движется неравномерно по криволинейной траектории.

В заключение заметим, что если точка движется равномерно по криволинейной траектории, то можно вычислить путь, пройденный точкой, по формуле $s = vt$.

При произвольном движении вектор ускорения направлен внутрь траектории. Тангенциальная составляющая этого вектора характеризует изменение скорости по модулю, а нормальная составляющая — по направлению.

§ 1.28. УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ И УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ

При движении точки по окружности радиус R, очевидно, — постоянная величина. Это позволяет ввести новые величины, наилучшим образом описывающие данное движение: положение характеризовать углом, а вместо обычных скоростей и ускорений ввести угловую скорость и угловое ускорение.

Угловая скорость

Проведем координатную ось X через центр окружности (начало координат), вдоль которой движется точка (рис. 1.86). Тогда положение точки A на окружности в любой момент времени однозначно определяется углом φ между осью X и радиусом-вектором $\vec{R}$, проведенным из центра окружности к движущейся точке. Углы будем выражать в радианах[1].

[1] Напомним, что радиан равен центральному углу, опирающемуся на дугу, длина которой равна радиусу окружности. 1 рад приблизительно равен 57°17′48″. В радианной мере угол равен отношению длины дуги окружности к ее радиусу: $\varphi = \frac{l}{R}$.

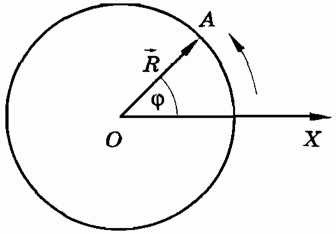


Рис. 1.86

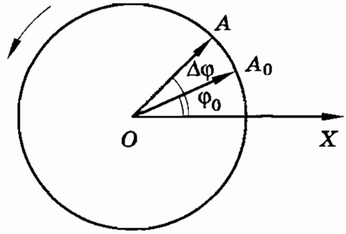


Рис. 1.87

При движении точки угол φ изменяется. Обозначим изменение угла за время Δt через $\Delta\varphi$. Для нахождения положения точки в любой момент времени надо знать угол φ_0 в начальный момент времени t_0 и определить, на сколько изменился угол за время движения (рис. 1.87):

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi. \qquad (1.28.1)$$

Пусть точка движется по окружности с постоянной по модулю скоростью. Тогда за любые равные промежутки времени радиус-вектор поворачивается на одинаковые углы. Быстрота обращения точки определяется углом поворота радиуса-вектора за данный интервал времени. Например, если радиус-вектор точки за каждую секунду поворачивается на угол $90° = \frac{\pi}{2}$, а другой точки — на угол $45° = \frac{\pi}{4}$, то мы говорим, что первая точка обращается быстрее второй в два раза.

Если при равномерном обращении за время Δt радиус-вектор повернулся на угол $\Delta\varphi$, то быстрота обращения определится углом поворота в единицу времени. Быстроту обращения характеризуют угловой скоростью.

Угловой скоростью при равномерном движении точки по окружности называется отношение угла $\Delta\varphi$ поворота радиуса-вектора к промежутку времени Δt, за который этот поворот произошел.

Обозначим угловую скорость греческой буквой ω (омега). Тогда по определению[1]

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \qquad (1.28.2)$$

[1] Когда точка движется неравномерно, то мгновенная угловая скорость определяется как предел отношения $\Delta\varphi$ к Δt при условии, что $\Delta t \to 0$:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

В СИ[1] угловая скорость выражается в радианах в секунду (рад/с).

Радиан в секунду равен угловой скорости равномерно обращающейся точки, при которой за время 1 с радиус-вектор этой точки поворачивается на угол 1 рад.

Например, угловая скорость точки земной поверхности равна 0,0000727 рад/с, а точильного диска более 100 рад/с.

Угловую скорость можно выразить через частоту обращения, т. е. число оборотов за 1 с. Если точка делает n оборотов в секунду, то время одного оборота равно $\frac{1}{n}$. Это время называют периодом обращения и обозначают буквой T. Таким образом, частота и период обращения связаны следующим соотношением:

$$T = \frac{1}{n}. \qquad (1.28.3)$$

Полному обороту точки на окружности соответствует угол $\Delta\varphi = 2\pi$. Поэтому, согласно формуле (1.28.2),

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n.} \qquad (1.28.4)$$

Частота обращения точек рабочих колес мощных гидротурбин составляет 1—10 $с^{-1}$, винта вертолета — 4—6 $с^{-1}$, ротора газовой турбины — 200—300 $с^{-1}$.

Если при равномерном обращении точки угловая скорость известна, то можно найти изменение угла поворота $\Delta\varphi$ за время Δt. Оно равно $\Delta\varphi = \omega\Delta t$. С учетом этого формула (1.28.1) примет вид: $\varphi = \varphi_0 + \omega\Delta t$. Приняв начальный момент времени t_0 равным нулю, получим, что $\Delta t = t - t_0 = t$. Тогда угол поворота равен

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega t.} \qquad (1.28.5)$$

По этой формуле можно найти положение точки на окружности в любой момент времени.

---

[1] СИ — Международная система единиц. В этой системе за единицу длины принят 1 м, за единицу времени — 1 с. Подробнее о СИ будет рассказано в дальнейшем.

Угловое ускорение

В случае переменной угловой скорости вводится новая физическая величина, характеризующая быстроту ее изменения, — угловое ускорение:

$$\beta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \qquad (1.28.6)$$

Угловое ускорение равно производной угловой скорости по времени. Если $\beta = \text{const}$, то $\omega(t) = \omega_0 + \beta(t - t_0)$, где ω_0 — угловая скорость в начальный момент времени t_0. При $t_0 = 0$

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta t. \qquad (1.28.7)$$

Эта формула подобна формуле проекции скорости $v_x = v_{0x} + a_x t$ при прямолинейном движении точки.

Соответственно угол поворота

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}. \qquad (1.28.8)$$

Эту формулу можно получить точно таким же способом, как и уравнение координаты при прямолинейном движении $x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$.

Связь между линейной и угловой скоростями

Скорость точки, движущейся по окружности, часто называют линейной скоростью, чтобы подчеркнуть ее отличие от угловой скорости. *Между линейной скоростью точки, обращающейся по окружности, и ее угловой скоростью существует связь.* При равномерном движении точки по любой траектории модуль скорости равен отношению пути s ко времени Δt, за которое этот путь пройден. Точка A, движущаяся по окружности радиусом R, за время Δt проходит путь, равный длине дуги $\overset{\frown}{A_1A_2}$ (рис. 1.88): $s = \overset{\frown}{A_1A_2} = \Delta\varphi R$. Модуль линейной скорости движения

$$v = \frac{s}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} R = \omega R.$$

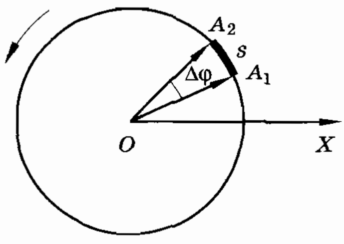


Рис. 1.88

Итак, *модуль линейной скорости точки, движущейся по окружности, равен произведению угловой скорости на радиус окружности*:

$$\boxed{v = \omega R.} \qquad (1.28.9)$$

Эта формула справедлива как для равномерного, так и для неравномерного движения точки по окружности.

Из выражения (1.28.9) видно, что чем больше радиус окружности, тем больше линейная скорость точки. Для точек земного экватора v = 463 м/с, а на широте Санкт-Петербурга — 233 м/с. На полюсах Земли $v = 0$.

Модуль ускорения точки, движущейся равномерно по окружности (центростремительное, или нормальное, ускорение) можно выразить через угловую скорость тела и радиус окружности. Так как $a = \frac{v^2}{R}$ и $v = \omega R$, то

$$\boxed{a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R.} \qquad (1.28.10)$$

Чем больше радиус окружности, тем большее по модулю ускорение имеет точка при заданной угловой скорости. Ускорение любой точки поверхности Земли на экваторе составляет 3,4 см/с^2.

Связь линейного ускорения с угловым

С изменением угловой скорости точки меняется и ее линейная скорость. Нормальное ускорение связано согласно формуле (1.28.10) с угловой скоростью и не зависит, следовательно, от углового ускорения. Но тангенциальное ускорение, определяемое формулой (1.27.4), выражается через угловое ускорение:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\omega)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = \beta R. \qquad (1.28.11)$$

Мы научились полностью описывать движение точки по окружности. При фиксированном радиусе окружности модуль скорости (линейная скорость) пропорционален угловой скорости, а нормальное ускорение пропорционально ее квадрату. Тангенциальное ускорение пропорционально угловому ускорению.

Упражнение 5

1. Поезд движется по закруглению радиусом 200 м со скоростью 36 км/ч. Найдите модуль нормального ускорения.

2. Тело брошено с поверхности Земли под углом 60° к горизонту. Модуль начальной скорости равен 20 м/с. Чему равен радиус кривизны траектории в точке максимального подъема?

3. Определите радиус кривизны траектории снаряда в момент вылета из орудия, если модуль скорости снаряда равен 1 км/с, а скорость составляет угол 60° с горизонтом.

4. Снаряд вылетает из орудия под углом 45° к горизонту. Чему равна дальность полета снаряда, если радиус кривизны траектории в точке максимального подъема равен 15 км?

5. Сферический резервуар, стоящий на земле, имеет радиус R. При какой наименьшей скорости камень, брошенный с поверхности Земли, может перелететь через резервуар, коснувшись его вершины? Под каким углом к горизонту должен быть при этом брошен камень?

6. Въезд на один из самых высоких в Японии мостов имеет форму винтовой линии, обвивающей цилиндр радиусом r. Полотно дороги составляет угол α с горизонтальной плоскостью. Найдите модуль ускорения автомобиля, движущегося по въезду с постоянной по модулю скоростью v.

7. Точка начинает двигаться равноускоренно по окружности радиусом 1 м и за 10 с проходит путь 50 м. Чему равно нормальное ускорение точки через 5 с после начала движения?

8. Поезд въезжает на закругленный участок пути с начальной скоростью 54 км/ч и проходит путь 600 м за 30 с. Радиус закругления равен 1 км. Определите модуль скорости и полное ускорение поезда в конце этого пути, считая тангенциальное ускорение постоянным по модулю.

9. Груз P начинает опускаться с постоянным ускорением $a = 2$ м/с^2 и приводит в движение ступенчатый шкив радиусами $r = 0{,}25$ м и $R = 0{,}50$ м (рис. 1.89). Какое ускорение a_1 будет иметь точка M через $t = 0{,}50$ с после начала движения?

10. Маховик приобрел начальную угловую скорость $\omega = 2\pi$ рад/с. Сделав 10 оборотов, он вследствие трения в подшипниках остановился. Найдите угловое ускорение маховика, считая его постоянным.

11. Маховое колесо радиусом $R = 1$ м начинает движение из состояния покоя равноуско-

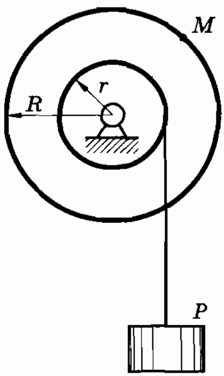


Рис. 1.89

ренно. Через $t_1 = 10$ с точка, лежащая на его ободе, приобретает скорость $v_1 = 100$ м/с. Найдите скорость, а также нормальное, касательное и полное ускорения этой точки в момент времени $t_2 = 15$ с.

12. Шкив радиусом $R = 20$ см начинает вращаться с угловым ускорением $\beta = 3$ рад/с^2. Через какое время точка, лежащая на его ободе, будет иметь ускорение $a = 75$ см/с^2?

13. Точка начинает обращаться по окружности с постоянным ускорением $\beta = 0{,}04$ рад/с^2. Через какое время вектор ее ускорения будет составлять с вектором скорости угол $\alpha = 45°$?

§ 1.29. ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

Еще в § 1.2 при первом знакомстве с механическим движением мы подчеркивали необходимость выбора системы отсчета. Настала пора проанализировать выводы о движении, полученные наблюдателями, находящимися в разных системах отсчета, и сравнить результаты их наблюдений.

В начале изучения кинематики для описания движения тела мы ввели понятие системы отсчета. Дело в том, что не имеют определенного смысла слова «тело движется». Нужно сказать, по отношению к каким телам или относительно какой системы отсчета это движение рассматривается. В этом мы неоднократно убеждались. Приведем еще несколько примеров.

Пассажиры движущегося поезда неподвижны относительно стен вагона. И те же пассажиры движутся в системе отсчета, связанной с Землей. Поднимается лифт. Стоящий на его полу чемодан покоится относительно стен лифта и человека, находящегося в лифте. Но он движется относительно Земли и дома.

Еще пример: соревнуются мотоциклисты. Вот они поравнялись и начали двигаться относительно Земли с одинаковыми скоростями. Расстояние между ними не изменяется, они не обгоняют друг друга. Друг относительно друга мотоциклисты покоятся, но движутся относительно Земли.

Этих примеров достаточно, чтобы убедиться в относительности движения и, в частности, относительности понятия скорости. Скорость одного и того же тела различна в разных системах отсчета.

При решении конкретной задачи мы можем выбрать ту или иную систему отсчета. Но среди этих систем отсчета находятся одна-две наиболее удобные, в которых движение выглядит проще. Особенно важен выбор системы отсчета в космонавтике. Стыковку космических кораблей рассматривают в системе отсчета, связанной с одним из кораблей. При выводе корабля на орбиту удобнее система отсчета, связанная с Землей (геоцентрическая система). Полет межпланетных станций изучают в гелиоцентрической системе отсчета (связанной с Солнцем). Оси координат этой системы направлены на неподвижные звезды, а начало координат совмещено с центром Солнца.

Наблюдатели, находящиеся в разных системах отсчета, должны хорошо понимать друг друга. Космонавты в орбитальной станции и люди в Центре управления полетом должны представлять движение с точки зрения Земли и корабля, уметь быстро определять характеристики движения в любой из систем, если известно, как оно происходит в одной из них.

Об относительности движения люди догадывались давно. Наиболее четко понятие относительности движения было сформулировано Коперником и Галилеем. В своем знаменитом труде «О вращении небесных сфер» Коперник писал: «Так при движении корабля в тихую погоду все находящееся вне представляется мореплавателям движущимся, а сами наблюдатели, наоборот, считают себя в покое со всем с ними находящимся. Это же, без сомнения, может происходить при движении Земли, так что мы думаем, будто вокруг нее вращается вся Вселенная».

Относительна не только скорость, но и форма траектории, пройденный телом путь. Катится, к примеру, колесо по поверхности Земли (рис. 1.90, *а*). Точка A обода колеса относительно системы координат $X_1O_1Y_1$ движется по окружности, проходя

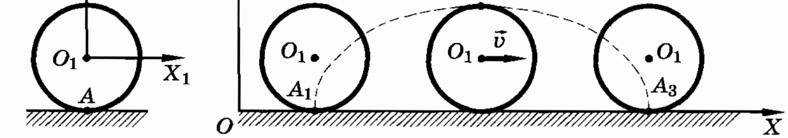


Рис. 1.90

за время одного оборота колеса путь, равный длине окружности. Но относительно системы координат XOY (рис. 1.90, *б*), связанной с поверхностью Земли, траекторией точки A является более сложная кривая $A_1A_2A_3$, называемая циклоидой. За тот же интервал времени точка A проходит путь, равный длине этой кривой.

Представьте себе пассажира в движущемся равномерно относительно поверхности Земли вагоне, выпускающего из рук мяч. Он видит, как мяч падает относительно вагона вертикально вниз с ускорением $\vec{g}$. Свяжем с вагоном систему координат $X_1O_1Y_1$ (рис. 1.91). В этой системе координат за время падения мяч пройдет путь $AD = h$, и пассажир отметит, что мяч упал на пол со скоростью $\vec{v}_1$, направленной вертикально вниз.

Ну а что увидит наблюдатель, находящийся на неподвижной платформе, с которой связана система координат XOY? Он заметит (представим себе, что стены вагона прозрачны), что траекторией мяча является парабола AD, и мяч упал на пол со скоростью $\vec{v}_2$, направленной под углом к горизонту (см. рис. 1.91).

Итак, мы отмечаем, что наблюдатели в системах координат $X_1O_1Y_1$ и XOY обнаруживают различные по форме траектории, скорости и пройденные пути при движении одного тела — мяча.

Надо отчетливо представлять себе, что все *кинематические понятия: траектория, координаты, путь, перемещение, скорость имеют определенную форму или чис-*

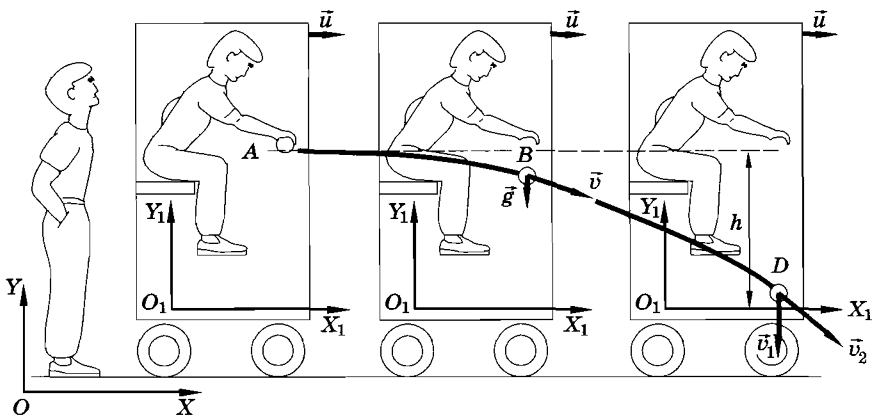


Рис. 1.91

ленные значения в одной выбранной системе отсчета. При переходе от одной системы отсчета к другой указанные величины могут измениться. В этом и состоит о т н о с и т е л ь н о с т ь д в и ж е н и я, и в этом смысле *механическое движение всегда относительно.*

Длительное время изучая кинематику точки, мы ограничивались выбором одной системы отсчета. В этом есть определенный смысл. Не так уж просто было приобрести навыки в обращении с множеством вводимых понятий и их приложениями к количественным расчетам. Надо было научиться описывать движение точки хотя бы в одной системе отсчета.

Важным вопросом кинематики является установление связи между кинематическими величинами, характеризующими механическое движение в двух различных системах отсчета, движущихся друг относительно друга.

? По реке плывет плот. Человек переходит из одной точки плота в другую в направлении, перпендикулярном течению реки. Начертите перемещение человека относительно плота, относительно берега, а также перемещение плота относительно берега.

§ 1.30. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ И ИХ СЛЕДСТВИЯ

Связь координат точки в системах отсчета, движущихся друг относительно друга, описывается преобразованиями Галилея. Преобразования всех других кинематических величин являются их следствиями.

Преобразование координат

Найдем связь между координатами, проекциями скоростей и ускорений в двух системах отсчета K и K_1, движущихся относительно друг друга с постоянной скоростью $\vec{u}$. Для простоты будем считать, что координатные оси X и X_1 обеих систем совпадают, а оси Y, Y_1 и Z, Z_1 параллельны друг другу. Пусть в начальный момент времени начала координат обеих систем совпадают.

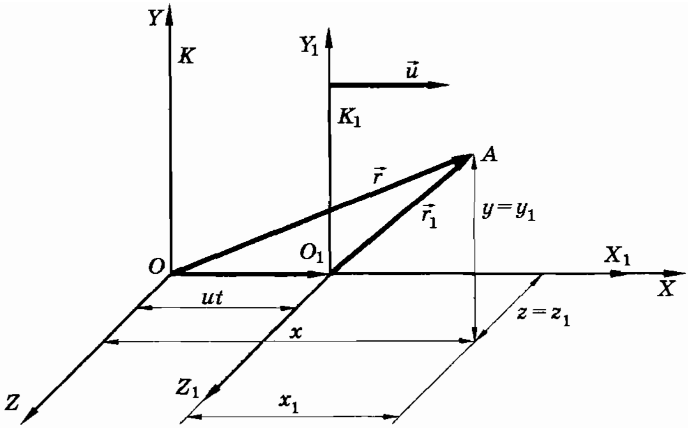


Рис. 1.92

Если в момент времени t движущаяся точка находилась в положении A (рис. 1.92), то ее положения в системах отсчета K и K_1 можно задать радиусами-векторами $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ и $\vec{r}_1 = \overrightarrow{O_1A}$. Тогда $\vec{r} = \overrightarrow{OO_1} + \vec{r}_1$. За время t начало координат системы отсчета K_1 переместилось на $\overrightarrow{OO_1} = \vec{u}t$. Поэтому предыдущее равенство примет вид:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{u}t. \tag{1.30.1}$$

Запишем соотношение (1.30.1) в проекциях на ось X:

$$x = x_1 + u_x t. \tag{1.30.2}$$

Координаты y, z и y_1, z_1 одинаковы в обеих системах отсчета. Поэтому преобразования координат при переходе от системы отсчета K_1 к системе отсчета K будут иметь вид:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + u_x t, \\ y &= y_1, \\ z &= z_1. \end{aligned} \tag{1.30.3}$$

Считается само собой разумеющимся, что время течет одинаково в системах отсчета K и K_1, так что $t = t_1$. Преобразования (1.30.1) или (1.30.3) вместе с утверждением о независимости течения времени от движения ($t = t_1$) называются **преобразованиями Галилея**.

Учитывая, что $u_x = u$, преобразования Галилея запишем так:

$$\begin{cases} x = x_1 + ut, \\ y = y_1, \\ z = z_1, \\ t = t_1 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1 = x - ut, \\ y_1 = y, \\ z_1 = z, \\ t_1 = t. \end{cases} \qquad (1.30.4)$$

Закон сложения скоростей

Найдем теперь преобразования скоростей при переходе от одной системы отсчета к другой.

При движении точки A ее радиус-вектор $\vec{r}$ в системе отсчета K за малый интервал времени Δt изменится на $\Delta\vec{r}$ и станет равным $\vec{r} + \Delta\vec{r}$. За то же время в системе отсчета K_1 вектор $\vec{r}_1$ изменится на $\Delta\vec{r}_1$ и станет равным $\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_1$. Согласно равенству (1.30.1) эти новые векторы должны быть связаны соотношением:

$$\vec{r} + \Delta\vec{r} = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_1 + \vec{u}\,(t + \Delta t).$$

Учитывая, что $\vec{r} = \Delta\vec{r}_1 + \vec{u}t$, получим

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_1 + \vec{u}\Delta t. \qquad (1.30.5)$$

Эта формула связывает перемещения $\Delta\vec{r}$ и $\Delta\vec{r}_1$ за время Δt. Разделим правую и левую части этого равенства на Δt и будем считать, что интервал Δt сколь угодно мал ($\Delta t \to 0$). Тогда вместо (1.30.5) получим уравнение:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t} + \vec{u}.$$

Но $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{\upsilon}$ — есть мгновенная скорость точки в системе отсчета K, а $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t} = \vec{\upsilon}_1$ — мгновенная скорость этой же точки относительно системы отсчета K_1.

Таким образом, скорости точки в различных системах отсчета, движущихся относительно друг друга с постоянной скоростью $\vec{u}$, связаны соотношением

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{u}.} \tag{1.30.6}$$

Преобразование скоростей (1.30.6) называется законом сложения скоростей в классической механике.

Учитывая, что при движении вдоль совпадающих осей координат X и X_1 проекции скорости $\vec{u}$ на оси Y и Z равны нулю ($u_y = 0$, $u_z = 0$), закон сложения проекций скоростей можно записать так:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{1x} + u_x, \\ v_y &= v_{1y}, \\ v_z &= v_{1z}. \end{aligned} \tag{1.30.7}$$

Абсолютная, относительная и переносная скорости

Часто для большей наглядности и удобства используют понятия абсолютного, относительного и переносного движений[1]. Для этого одну из систем координат, например XOY, считают условно неподвижной. Движение тела относительно неподвижной системы координат называют абсолютным. Движение тела относительно подвижной системы координат (относительно $X_1O_1Y_1$) называют относительным. Движение подвижной системы координат относительно неподвижной называют переносным.

Скорость, ускорение, перемещение, путь и траекторию точки в неподвижной системе координат называют абсолютными, а в подвижной системе — относительными. В формуле (1.30.6) $\vec{v}$ — абсолютная скорость ($\vec{v}_а$), $\vec{v}_1$ — относительная скорость ($\vec{v}_{от}$) и $\vec{u}$ — переносная скорость ($\vec{v}_п$). Теперь закон сложения скоростей (1.30.6) можно записать так:

$$\vec{v}_а = \vec{v}_{от} + \vec{v}_п. \tag{1.30.8}$$

---

[1] Все эти понятия ни в коем случае не надо понимать буквально, так как никакого абсолютного движения нет. Но при использовании этих понятий формула сложения скоростей становится проще для запоминания и применения, чем использование безликих индексов у скоростей.

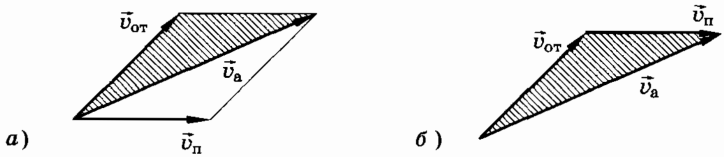


Рис. 1.93

Абсолютная скорость равна векторной сумме относительной и переносной скоростей.

Закон сложения скоростей (1.30.8) геометрически осуществляется по правилу параллелограмма (рис. 1.93, *а*) или треугольника (рис. 1.93, *б*). Он справедлив и в том случае, когда скорость $\vec{v}_п$ направлена произвольным образом по отношению к системе отсчета K и меняется с течением времени.

Преобразование ускорений

Пусть в системе отсчета K_1 ускорение тела равно $\vec{a}_{от}$. Каким оно будет в системе отсчета K?

Прежде всего договоримся, что система отсчета K_1 движется относительно системы отсчета K не вращаясь, т. е. так, что оси X, Y, Z и X_1, Y_1, Z_1 остаются параллельными. Только при этом условии будет справедлив следующий ниже вывод.

Запишем закон сложения скоростей (1.30.8) для двух моментов времени $t_0 = 0$ и t:

$$\vec{v}_а(0) = \vec{v}_{от}(0) + \vec{v}_п(0),$$
$$\vec{v}_а(t) = \vec{v}_{от}(t) + \vec{v}_п(t).$$

Вычтем почленно из второго уравнения первое и разделим обе части полученного равенства на интервал времени Δt:

$$\frac{\Delta \vec{v}_а}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}_{от}}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{v}_п}{\Delta t}.$$

Будем промежуток времени Δt неограниченно уменьшать ($\Delta t \to 0$) и перейдем к пределу:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_а}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_{от}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_п}{\Delta t}.$$

Это равенство означает, что

$$\vec{a}_а = \vec{a}_{от} + \vec{a}_п. \qquad (1.30.9)$$

Итак, ускорение тоже относительно. Но есть один очень важный случай, когда ускорение одинаково, абсолютно. Это случай, когда $a_п = 0$, т. е. вторая система отсчета движется относительно первой равномерно и прямолинейно.

Независимость расстояний от выбора системы отсчета

Из преобразований Галилея вытекает равенство расстояний между двумя точками во всех системах отсчета, движущихся относительно друг друга. Расстояние между двумя точками A и B в системе отсчета K представляет собой модуль вектора $\vec{r}_A - \vec{r}_B$, т. е. $r_{AB} = |\vec{r}_A - \vec{r}_B|$. Согласно преобразованиям Галилея (1.30.1)

$$\vec{r}_A = \vec{r}_{1A} + \vec{u}t \quad \text{и} \quad \vec{r}_B = \vec{r}_{1B} + \vec{u}t.$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим:

$$\vec{r}_A - \vec{r}_B = \vec{r}_{1A} - \vec{r}_{1B}.$$

Но модуль вектора $\vec{r}_{1A} - \vec{r}_{1B}$ есть расстояние r_{1AB} между точками A и B в системе отсчета K_1. Следовательно,

$$r_{AB} = r_{1AB}, \qquad (1.30.10)$$

так как модули равных векторов одинаковы. В координатной форме это уравнение запишется следующим образом:

$$\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} =$$
$$= \sqrt{(x_{1A} - x_{1B})^2 + (y_{1A} - y_{1B})^2 + (z_{1A} - z_{1B})^2}. \qquad (1.30.11)$$

Относительная скорость двух тел

Рассмотрим два тела A и B, имеющих в системе отсчета K скорости $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$. Найдем скорость движения $\vec{v}_{BA}$ тела B относительно тела A. Для этого свяжем систему отсчета K_1 с телом A (рис. 1.94). Тогда искомая относительная скорость $\vec{v}_{BA}$ есть скорость тела B относительно системы отсчета K_1.

Воспользуемся далее законом сложения скоростей (1.30.8). Для данного случая скорость тела B относительно системы отсчета K представляет собой абсолютную скорость: $\vec{v}_B = \vec{v}_а$. Скорость тела A в системе отсчета K — это переносная скорость. Наконец, скорость $\vec{v}_{BA}$ — это есть относительная скорость: $\vec{v}_{BA} = \vec{v}_{от}$. Согласно закону сложения скоростей (1.30.8) имеем

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{BA} + \vec{v}_A$$

или

$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A.$$

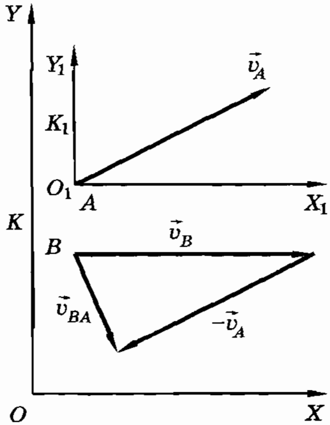


Рис. 1.94

Скорость движения тела B относительно тела A равна разности скоростей этих двух тел. Она не зависит от системы отсчета. В любой системе отсчета, движущейся со скоростью $\vec{u}$ относительно системы отсчета K,

$$\vec{v}_{1A} = \vec{v}_A + \vec{u} \text{ и } \vec{v}_{1B} = \vec{v}_B + \vec{u}.$$

Отсюда

$$\vec{v}_{1B} - \vec{v}_{1A} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{v}_{BA} = \vec{v}_{1BA}. \qquad (1.30.12)$$

Преобразования Галилея (1.30.4) ***вместе с утверждением о независимости течения времени от движения*** ($t = t_1$) ***отражают суть классических представлений о пространстве — времени. Согласно этим представлениям расстояния между телами одинаковы во всех системах отсчета и течение времени не зависит от систем отсчета.***

§ 1.31. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Из всех задач на относительность движения мы будем в основном решать такие, которые связаны с законом сложения скоростей (1.30.7) или (1.30.8). Для этого удобно использовать понятия абсолютного, относительного и переносного движений.

Решая задачу, следует выбрать две системы координат и одну из них условно принять за неподвижную, после чего уяснить, какая скорость будет абсолютной, переносной и относительной. Далее надо записать закон сложения скоростей (1.30.8). После этого можно переходить к записи этого закона в проекциях на выбранные направления осей координат. Но можно воспользоваться и геометрическим сложением векторов.

Мы рассмотрим несколько задач, причем в большинстве случаев приведем два решения с различным выбором неподвижной системы отсчета. При этом убедимся, что не имеет принципиального значения, какую систему считать неподвижной. Однако в некоторых случаях удачный выбор неподвижной системы отсчета упрощает решение (задача 5).

Задача 1

Участок шоссе расположен параллельно железной дороге. Найдите время, в течение которого мотоциклист, движущийся со скоростью $\upsilon_1 = 80$ км/ч, будет перемещаться мимо встречного поезда длиной $l = 700$ м, следующего со скоростью $\upsilon_2 = 46$ км/ч. Обе скорости заданы относительно Земли.

Решение. 1. Если мотоциклист движется относительно поезда с некоторой скоростью $\vec{\upsilon}$, то путь, равный длине поезда, он пройдет за время

$$t = \frac{l}{\upsilon}.$$

Длина поезда известна. Скорость мотоциклиста относительно поезда найдем по закону сложения скоростей: $\vec{\upsilon}_{\text{а}} = \vec{\upsilon}_{\text{от}} + \vec{\upsilon}_{\text{п}}$.

Неподвижную систему координат XOY свяжем с Землей, а подвижную $X_1O_1Y_1$ — с поездом (рис. 1.95). Движение

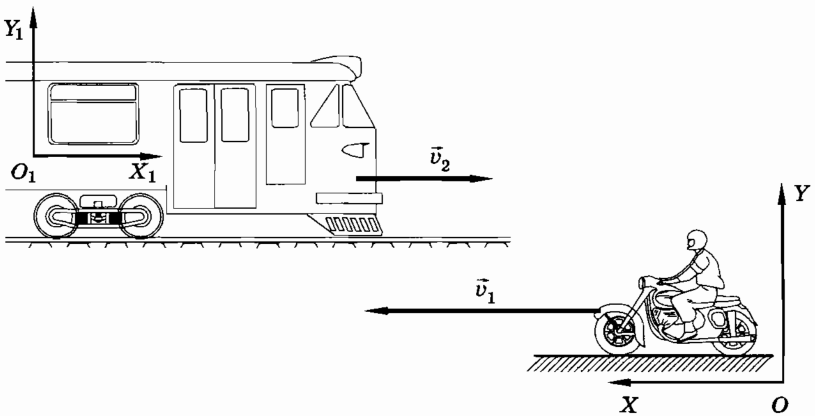


Рис. 1.95

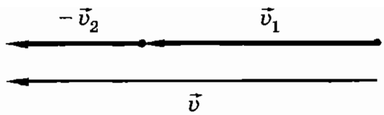


Рис. 1.96

мотоциклиста относительно Земли (неподвижной системы координат XOY) является абсолютным, а движение поезда относительно Земли — переносным. Скорость мотоциклиста относительно поезда (подвижной системы координат $X_1O_1Y_1$) является относительной. Следовательно, в данном случае: $\vec{v}_а = \vec{v}_1$, $\vec{v}_п = \vec{v}_2$ и $\vec{v}_{от} = \vec{v}$. Поэтому закон сложения скоростей можно записать так:

$$\vec{v}_1 = \vec{v} + \vec{v}_2.$$

Отсюда $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Выполним вычитание векторов геометрически. Из рисунка 1.96 видно, что $v = v_1 + v_2$, поэтому

$$t = \frac{l}{v_1 + v_2} = 20 \text{ с}.$$

2. Решим ту же задачу, изменив выбор систем координат: неподвижную систему координат XOY свяжем с поездом, а подвижную $X_1O_1Y_1$ — с Землей. Теперь в системе координат XOY Земля движется навстречу поезду со скоростью $\vec{v}_3 = -\vec{v}_2$,

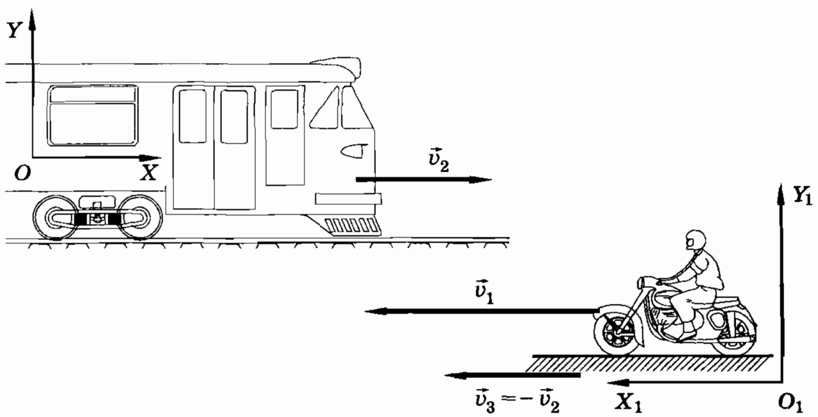


Рис. 1.97

т. е. переносная скорость $\vec{v}_п = -\vec{v}_2$ (рис. 1.97). Мотоциклист перемещается относительно подвижной системы координат (Земли). Поэтому его скорость в данном случае является относительной: $\vec{v}_{от} = \vec{v}_1$. Скорость же мотоциклиста относительно системы координат XOY (поезда) — абсолютна, т. е. $\vec{v}_а = \vec{v}$.

Согласно закону сложения скоростей будем иметь $\vec{v}_а = \vec{v}_{от} + \vec{v}_п$ или $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Мы пришли к тому же результату, что и при первом способе выбора систем координат. Результат вычитания векторов опять такой же, как на рисунке 1.96. Поэтому $v = v_1 + v_2$ и $t = 20$ с.

3. Можно неподвижную систему координат связать с мотоциклистом, а подвижную с Землей. Рассмотрите самостоятельно этот вариант решения. Безусловно, вы придете к тому же результату.

Задача 2

Капли дождя падают относительно Земли отвесно со скоростью $v_1 = 20$ м/с. С какой наименьшей скоростью v_2 относительно Земли должен двигаться автомобиль, чтобы на заднем смотровом стекле, наклоненном под углом 45° к горизонту, не оставалось следов капель? Чему равна скорость капель относительно автомобиля? Завихрения воздуха не учитывать.

Решение. 1. Капли дождя не будут задевать стекла автомобиля, если вектор скорости капель относительно автомобиля направлен параллельно стеклу. Этим определяется минимальная скорость автомобиля. Чтобы найти ее, воспользуемся законом сложения скоростей:

$$\vec{v}_а = \vec{v}_{от} + \vec{v}_п.$$

Систему координат XOY свяжем с Землей и будем считать ее неподвижной. Движущуюся систему координат $X_1O_1Y_1$ свяжем с автомобилем (рис. 1.98). Обозначим скорость капель относительно автомобиля через $\vec{v}$. Тогда

$$\vec{v}_а = \vec{v}_1, \ \vec{v}_{от} = \vec{v}, \ \vec{v}_п = \vec{v}_2.$$

Следовательно, закон сложения скоростей запишется так:

$$\vec{v}_1 = \vec{v} + \vec{v}_2.$$

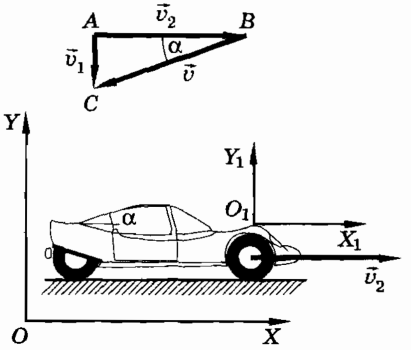


Рис. 1.98

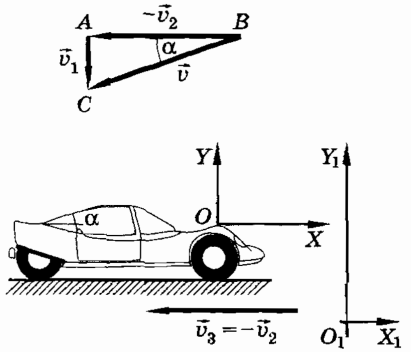


Рис. 1.99

Отсюда

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2.$$

Вычитание векторов $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ показано на рисунке 1.98 ($\triangle ABC$). Поскольку треугольник ABC — прямоугольный и $\angle ABC = \alpha$, то $v = \dfrac{v_1}{\sin\alpha}$ и $v_2 = v_1 \operatorname{ctg} \alpha$; $v = \dfrac{20 \text{ м/с}}{\sin 45^\circ} \approx 28$ м/с и $v_2 = v_1 = 20$ м/с.

2. Решим эту задачу, связав неподвижную систему координат XOY с автомобилем, а подвижную $X_1O_1Y_1$ — с Землей (рис. 1.99). В этом случае относительно системы координат XOY Земля движется навстречу автомобилю со скоростью $\vec{v}_3 = -\vec{v}_2$. Так как $\vec{v}_a = \vec{v}$, $\vec{v}_\text{п} = -\vec{v}_2$, $\vec{v}_\text{от} = \vec{v}_1$, то закон сложения скоростей запишется следующим образом:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_2).$$

Сложение векторов $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_3 = -\vec{v}_2$ показано на рисунке 1.99.

Мы пришли к тому же результату, что и при первом способе решения задачи:

$$v_2 = v_1 = 20 \text{ м/с} \;\text{ и }\; v \approx 28 \text{ м/с}.$$

Задача 3

Два корабля идут пересекающимися курсами. В некоторый момент времени расстояние между ними $l = 10$ км, а скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ образовывали с прямой, соединяющей корабли, углы $\alpha = 45°$

(рис. 1.100). На каком минимальном расстоянии друг от друга пройдут корабли? Модули скоростей кораблей относительно воды $v_1 = 60$ км/ч, $v_2 = 80$ км/ч. Считайте, что морские течения отсутствуют.

Решение. Пусть в начальный момент времени первый корабль находился в точке A, а второй — в точке B (рис. 1.101).

Перейдем в систему координат, связанную с первым кораблем. Тогда скорость воды относительно этой системы $\vec{v}_{\text{п}} = -\vec{v}_1$ является переносной скоростью, а скорость второго корабля относительно воды есть относительная скорость $\vec{v}_{\text{от}} = \vec{v}_2$. Скорость второго корабля относительно первого при данном выборе системы отсчета будет абсолютной скоростью $\vec{v}_{\text{а}}$. По закону сложения скоростей $\vec{v}_{\text{а}} = \vec{v}_{\text{от}} + \vec{v}_{\text{п}}$ или $\vec{v}_{\text{а}} = \vec{v}_2 + (-\vec{v}_1)$ (см. рис. 1.101). Прямая BK — траектория второго корабля в системе отсчета, связанной с первым («неподвижным») кораблем. Кратчайшим расстоянием между кораблями будет длина перпендикуляра AC, опущенного из точки A на прямую BK.

Из прямоугольного треугольника, образованного векторами скоростей, находим модуль скорости $\vec{v}_{\text{а}}$ по теореме Пифагора:

$$v_{\text{а}} = \sqrt{v_{\text{п}}^2 + v_2^2} = 100 \text{ км/ч}.$$

Дальнейшее решение задачи является чисто геометрическим. Треугольник ADB прямоугольный и равнобедренный. Найдем длину его катета: $AD = DB = \dfrac{l}{\sqrt{2}}$. Из подобия треугольников BMN и BPD найдем $PD = \dfrac{DBv_{\text{п}}}{v_2}$. Вычислим длину отрезка $AP = AD - PD = \dfrac{AD(v_2 - v_{\text{п}})}{v_2}$, где $v_{\text{п}} = v_1$.

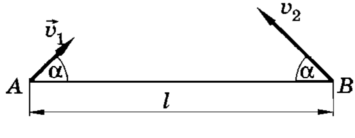


Рис. 1.100

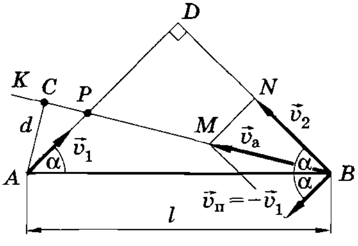


Рис. 1.101

Из подобия треугольников APC и BMN находим искомое расстояние $d = AC$:

$$\frac{d}{AP} = \frac{v_2}{v_а},\ d = \frac{l(v_2 - v_1)}{\sqrt{2(v_2^2 + v_1^2)}} \approx 1{,}4 \text{ км}.$$

Проанализируем различные частные случаи.

Если $v_2 = v_1$, то $d = 0$; корабли встретятся в точке D. Если относительно воды движется только один корабль ($v_1 = 0$ или $v_2 = 0$), то $d = \frac{l}{\sqrt{2}} = AD$.

Найти расстояние d можно из $\triangle ACB$: $d = l\sin\angle CBA$, где $\angle CBA \approx 8°$. Действительно, из $\triangle NBM$ находим $\sin\angle NBM = \frac{v_1}{v_а} = 0{,}6$. Отсюда $\angle NBM = 37°$. Так как $\angle CBA = 45° - 37° = 8°$, то

$$d = 10 \text{ км} \cdot \sin 8° \approx 1{,}4 \text{ км}.$$

Задача 4

Вагон A движется по закруглению радиусом $O_1A = 0{,}3$ км, а вагон B — прямолинейно (рис. 1.102, *а*). Найдите скорость вагона B относительно вагона A в момент, когда расстояние $AB = 0{,}1$ км. Скорость каждого вагона относительно Земли равна 60 км/ч.

Решение. Так как необходимо найти скорость вагона B относительно вагона A, то целесообразно (но необязательно) связывать с вагоном A неподвижную систему координат XOY. В этой системе вагон A не движется, но поверхность Земли под ним

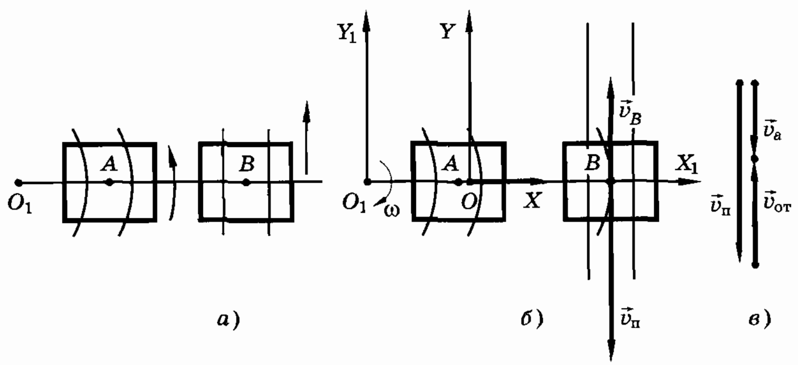


Рис. 1.102

поворачивается по часовой стрелке вокруг точки O_1 с угловой скоростью ω (рис. 1.102, *б*).

Систему координат $X_1O_1Y_1$ свяжем с Землей. Эта система координат вращается вместе с поверхностью Земли с угловой скоростью ω вокруг точки O_1.

Угловую скорость ω определим по движению вагона A относительно Земли: $v_A = \omega \cdot O_1A$. Отсюда $\omega = \dfrac{v_\text{A}}{O_1A}$.

При вращательном движении подвижной системы координат переносная скорость в каждый момент времени является той линейной скоростью, которую в данной точке пространства имеет вращающаяся система координат, связанная с Землей. Для вагона B переносной скоростью $\vec{v}_\text{п}$ является скорость точки оси X_1 на расстоянии O_1B от точки O_1. Найдем модуль этой скорости:

$$v_\text{п} = \omega \cdot O_1B = \omega(O_1A + AB) = v_A + v_A\frac{AB}{O_1A}.$$

Скорость вагона B относительно поверхности Земли (относительно подвижной системы координат $X_1O_1Y_1$) $\vec{v}_B = \vec{v}_\text{от}$ ($v_B = v_A$ по условию), но по отношению к вагону A (неподвижной системе координат XOY) скорость вагона B является абсолютной. Эту скорость мы найдем по закону сложения скоростей:

$$\vec{v}_\text{а} = \vec{v}_\text{от} + \vec{v}_\text{п}.$$

Сложение скоростей выполнено на рисунке 102, *в*. Из рисунка видно, что вагон B относительно вагона A движется в сторону, противоположную скорости вагона B относительно Земли, со скоростью $\vec{v}_\text{а}$, модуль которой равен

$$v_\text{а} = v_\text{п} - v_\text{от} = v_\text{п} - v_A = \left(v_A + v_A\frac{AB}{O_1A}\right) - v_A = v_A\frac{AB}{O_1A} = 20\text{ км/ч}.$$

Задача 5

Вверх по реке на весельной лодке плывет рыбак. Проплывая под мостом, он уронил удочку, но заметил это лишь полчаса спустя. Рыбак повернул назад и нагнал удочку на расстоянии 1,5 км от моста. Чему равна скорость течения реки, если рыбак греб одинаково интенсивно как при движении вверх (против течения), так и при движении вниз (по течению)?

Решение. 1. Решим задачу, выбрав в качестве неподвижной систему отсчета, связанную с берегом. Подвижную систему свяжем с водой. Скорость этой системы является переносной, а скорость лодки относительно воды (подвижной системы) — относительной. Модуль этой скорости одинаков при движении лодки в любом направлении. Модуль абсолютной скорости при движении лодки против течения $v'_а = v_{от} - v_п$, а по течению $v_а = v_{от} + v_п$.

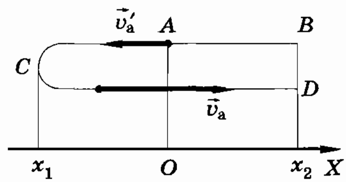


Рис. 1.103

Ось X направим по течению, начало координат совместим с мостом (рис. 1.103). Скорость удочки равна скорости течения реки $v_п$. Спустя время t удочка совершит перемещение AB и будет иметь координату $x_2 = v_п t$, где $x_2 = 1{,}5$ км.

Обозначим через $t_1 = 0{,}5$ ч время движения лодки от моста до поворота (точка C). Координату этой точки обозначим x_1. Через t_2 обозначим время движения лодки по течению от точки C до точки D. Тогда

$$t = t_1 + t_2. \qquad (1.31.1)$$

Запишем выражение для координаты x_1:

$$x_1 = v'_{ax} t_1 = -v'_а t_1 = (v_п - v_{от}) t_1.$$

Уравнение координаты лодки x_2 при ее движении по течению имеет вид

$$x_2 = x_1 + (v_п + v_{от}) t_2.$$

Отсюда

$$t_2 = \frac{x_2 - x_1}{v_п + v_{от}}. \qquad (1.31.2)$$

Подставив это выражение в (1.31.1) и учитывая, что $t = \dfrac{x_2}{v_п}$, получим

$$\frac{x_2}{v_п} = t_1 + \frac{x_2 + (v_{от} - v_п) t_1}{v_{от} + v_п}.$$

Отсюда

$$v_п = \frac{x_2}{2t_1} = 1{,}5 \text{ км/ч}.$$

2. Решение задачи будет значительно проще, если в качестве неподвижной системы выбрать систему отсчета, связанную с водой. В этой системе модуль скорости лодки при движении по всем направлениям одинаков, так как рыбак работает веслами все время одинаково. Поэтому если рыбак 0,5 ч удаляется от удочки, то и догонять ее он будет 0,5 ч. Следовательно, удочка была в движении 1 ч и проплыла 1,5 км относительно берега. Поэтому скорость течения воды относительно берега равна 1,5 км/ч.

Упражнение 6

1. Два автобуса движутся в одном направлении. Модули их скоростей соответственно равны 90 и 60 км/ч. Чему равна скорость первого автобуса относительно второго и второго относительно первого?
2. По двум параллельным железнодорожным путям навстречу друг другу движутся два поезда со скоростями 72 и 108 км/ч. Длина первого поезда 800 м, а второго 200 м. В течение какого времени один поезд проходит мимо другого?
3. Скорость течения реки $v_1 = 1{,}5$ м/с. Каков модуль скорости v катера относительно воды, если катер движется перпендикулярно к берегу со скоростью $v_2 = 2$ м/с относительно него?
4. Какую скорость относительно воды должен сообщить мотор катеру, чтобы при скорости течения реки, равной 2 м/с, катер двигался перпендикулярно берегу со скоростью 3,5 м/с относительно берега?
5. Капли дождя падают относительно Земли отвесно со скоростью 30 м/с. С какой наименьшей скоростью относительно Земли должен ехать автомобиль, чтобы на заднем смотровом стекле, наклоненном под углом 60° к горизонту, не оставалось следов капель? Завихрения воздуха не учитывать.
6. Эскалатор метро спускает идущего по нему человека за 1 мин. Если человек будет идти вдвое быстрее, то он спустится за 45 с. Сколько времени будет спускаться человек, стоящий на эскалаторе?
7. Гусеничный трактор движется со скоростью 72 км/ч относительно Земли. Чему равны относительно Земли модули скоростей: а) верхней части гусеницы; б) нижней части гусеницы; в) части гусеницы, которая в данный момент движется вертикально по отношению к трактору?
8. Человек спускается по эскалатору. В первый раз он насчитал 50 ступенек. Во второй раз, двигаясь со скоростью вдвое большей, он насчитал 75 ступенек. В какую сторону движется эскалатор?

Сколько ступенек насчитает человек, спускаясь по неподвижному эскалатору?

9. Теплоход от Нижнего Новгорода до Астрахани плывет 5 сут, а обратно 7 сут. Сколько времени от Нижнего Новгорода до Астрахани плывет плот?

10. Скорость течения реки возрастает пропорционально расстоянию от берега, достигая своего максимального значения $v_0 = 5$ м/с на середине реки. У берегов скорость течения равна нулю. Лодка движется по реке так, что ее скорость относительно воды постоянна, равна по модулю $u = 10$ м/с и направлена перпендикулярно течению. Найдите расстояние, на которое будет снесена лодка при переправе, если ширина реки $d = 100$ м. Определите траекторию лодки.

11. Скорость течения реки возрастает с расстоянием от берега, достигая своего максимального значения $v_0 = 5$ м/с на середине реки. У берегов скорость течения равна нулю. От берега начинает плыть спортсмен со скоростью $v = 4$ м/с относительно воды, направленной перпендикулярно течению. Стоявшая на середине реки на якоре лодка начинает двигаться параллельно берегу с постоянной относительно воды скоростью $u = 10$ м/с одновременно с пловцом. На каком расстоянии от места встречи с пловцом находилась первоначально лодка, если ширина реки $h = 100$ м?

12. Платформа движется со скоростью $v_1 = 40$ м/с. В момент, когда она пересекала прямую линию OM, перпендикулярную направлению движения (рис. 1.104), с платформы был произведен выстрел по неподвижной цели M. Зная, что скорость пули относительно платформы $v_2 = 800$ м/с, найдите направление, в котором был произведен выстрел.

13. Круглая горизонтальная платформа вращается вокруг своей оси с угловой скоростью 2 рад/с (рис. 1.105). Кубик M движется со скоростью 9 м/с в направлении MO. В некоторый момент времени рас-

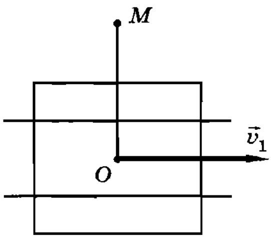


Рис. 1.104

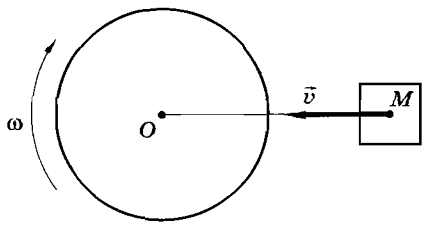


Рис. 1.105

стояние $MO = 6$ м. Найдите скорость кубика относительно наблюдателя, стоящего в центре платформы в этот момент времени.

14. Шоссейные дороги пересекаются под прямым углом. По дорогам движутся автомобили со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ в направлении к перекрестку ($v_1 > v_2$). В некоторый момент времени расстояние обоих автомобилей до перекрестка было одинаковым и равным l. На каком наименьшем расстоянии d автомобили прошли относительно друг друга?

15. Человек на лодке должен попасть из точки A в точку B, находящуюся на противоположном берегу реки (рис. 1.106). Расстояние $BC = a$. Ширина реки $AC = b$. С какой наименьшей скоростью u относительно воды должна плыть лодка, чтобы попасть в точку B? Скорость течения реки постоянна и равна v.

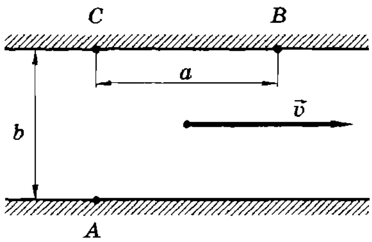


Рис. 1.106

16. Лифт движется с ускорением $\vec{a}$, направленным вверх. Человек, находящийся в лифте, роняет книгу. Чему равно ускорение книги относительно лифта? Решите задачу также для случая, когда ускорение лифта направлено вниз.

ДИНАМИКА

Глава 2

ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ НЬЮТОНА

При изучении различных движений в кинематике: равномерного прямолинейного движения, движения с постоянным ускорением и т. д. — мы не интересовались, почему в каждом конкретном случае происходит именно это движение, а не другое. Что является причиной движения вообще и изменения скорости в частности? На эти вопросы отвечает специальный раздел механики — динамика. В основе динамики лежат три закона Ньютона. Изучить их — наша задача.

§ 2.1. ОСНОВНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ МЕХАНИКИ

Механика — достаточно сложная наука. Но главное ее утверждение можно представить в одной фразе (см. с. 150).

Законам механики подчиняются движения всех окружающих нас тел.

Для того чтобы открыть эти законы, Ньютону не потребовались какие-либо сложные приборы. Достаточными оказались простые опыты. Главная трудность состояла в том, чтобы в огромном разнообразии движений тел увидеть то существенное, то общее, что определяет движение каждого тела.

Законы механики, как и все основные законы физики, имеют точную количественную форму. Но вначале мы попытаемся понять эти законы качественно. Так будет проще уловить главное содержание механики Ньютона. После этого перейдем к количественной формулировке законов механики.

Выбор системы отсчета

Мы уже знаем, что любое движение следует рассматривать по отношению к определенной системе отсчета.

В кинематике, т. е. при описании движения без рассмотрения причин его изменения, все системы отсчета равноправны. Выбор определенной системы отсчета для решения той или иной задачи диктуется соображениями целесообразности и удобства. Так, при стыковке космических кораблей удобно рассматривать движение одного из них относительно другого, а не относительно Земли.

В главном разделе механики — динамике — рассматриваются взаимные действия тел друг на друга, являющиеся причиной изменения движения тел, т. е. их скоростей.

Можно сказать, что если кинематика отвечает на вопрос: «Как движется тело?», то динамика выясняет, почему именно так.

Вопрос о выборе системы отсчета в динамике не является простым. Выберем вначале на первый взгляд естественную систему отсчета — систему, связанную с земным шаром. Движение тел вблизи поверхности Земли будем рассматривать относительно самой Земли.

Что вызывает ускорение тел?

Если тело, лежащее на земле, на полу или на столе, начинает двигаться, то всегда по соседству можно обнаружить предмет, который толкает это тело, тянет или действует на него на расстоянии (например, магнит на железный шарик). Поднятый над землей камень не остается висеть в воздухе, а падает. Надо думать, что именно действие Земли приводит к этому.

Вся совокупность подобных опытных фактов говорит о том, что **изменение скорости тела (т. е. ускорение) всегда вызывается воздействием на данное тело каких-либо других тел.** Эта фраза содержит самое главное утверждение механики Ньютона.

Может оказаться, что тело покоится или движется равномерно и прямолинейно, т. е. без ускорения ($a = 0$), хотя на него и действуют другие тела. Но если на тело не действуют другие тела, то скорость тела никогда не меняется.

Когда на столе лежит книга, то ее ускорение равно нулю, хотя действие со стороны других тел налицо. На книгу действуют притяжение Земли и стол, не дающий ей падать вниз.

В этом случае говорят, что действия уравновешивают друг друга. Но книга никогда не придет в движение, не получит ус-

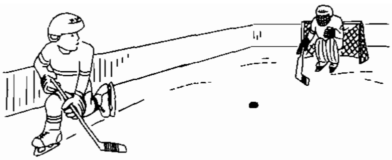


Рис. 2.1

корение, если на нее не подействовать рукой, сильной струей воздуха или еще каким-либо способом.

Перечислять экспериментальные доказательства того, что изменение скорости одного тела всегда вызывается действием на него других тел, нет никакой возможности да и особой необходимости. Действие тел друг на друга вы можете наблюдать на каждом шагу. Но только наблюдать надо уметь.

Футболист ударил по мячу. Ударил — значит, его нога оказала определенное воздействие на мяч, и скорость мяча увеличилась. А вот какое действие позволяет футболисту быстро устремиться к воротам противника? Одного желания здесь мало. Будь вместо футбольного поля идеально гладкий лед, а на ногах футболиста вместо бутс с шипами тапочки с гладкой подошвой, это ему не удалось бы. Для того чтобы бежать с ускорением, нужно упираться ногами в землю. Если ноги будут скользить, футболист никуда не убежит. Только трение о землю, действие со стороны земли на ноги футболиста позволяют ему, да и всем нам при беге и ходьбе изменять свою скорость. Точно так же, чтобы остановиться с разбегу, надо упираться ногами в землю.

Любой человек из своего опыта знает, что заставить какой-либо предмет изменить скорость (по числовому значению или направлению) можно, только оказав на него определенное воздействие. Трудно заподозрить учеников, скажем, 5 класса, гоняющих шайбу, в знакомстве с законами механики Ньютона. Но поступают они правильно. Они стараются, действуя клюшкой на шайбу, так изменить движение шайбы, чтобы она двигалась в нужном направлении: к воротам противника (рис. 2.1) или к партнеру по команде, находящемуся в выгодном положении.

Движение с постоянной скоростью

Не следует думать, что основное утверждение механики совершенно очевидно и уяснить его ничего не стоит.

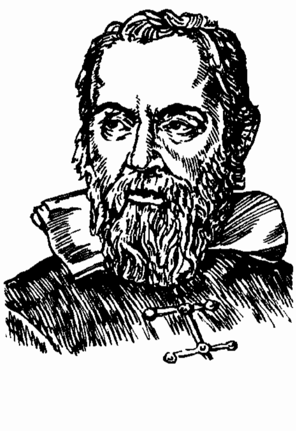
Если действий со стороны других тел на данное тело нет, то, согласно основному утверждению механики, ускорение тела равно нулю, т. е. тело будет покоиться или двигаться с постоянной скоростью.

Вот этот-то факт совсем не является само собой разумеющимся. Понадобился гений Галилея и Ньютона, чтобы его осознать. Ньютону вслед за Галилеем удалось окончательно развеять одно из глубочайших убеждений человечества о законах движения тел.

Начиная с великого древнегреческого философа Аристотеля, на протяжении почти двадцати веков все были убеждены, что для поддержания постоянной скорости тела необходимо, чтобы что-то (или кто-то) воздействовало на него, т. е. тело нуждается для поддержания своего движения в действиях, производимых на тело извне, в некоторой активной причине; думали, что без такой поддержки тело обязательно остановится.

Аристотель считал покой относительно Земли естественным состоянием тела, не требующим особой причины. Ведь Земля в то время считалась центром мироздания. Без активной причины тело возвращается в свое естественное состояние покоя.

Это, казалось бы, находит подтверждение в нашем повседневном опыте. Например, автомобиль с выключенным двигателем останавливается и на совершенно горизонтальной дороге. То же самое можно сказать о велосипеде, лодке на воде, бильярдных шарах и любых других движущихся телах. Вот почему



Галилео Галилей (1564—1642) — великий итальянский физик и астроном, впервые применивший экспериментальный метод исследования в науке.

Галилей открыл принцип относительности, ввел понятие инерции, исследовал законы падения тел и движения тел по наклонной плоскости, предложил применять маятник для измерения времени.

Впервые в истории человечества с помощью изготовленной им зрительной трубы Галилей открыл горы на Луне, спутники Юпитера, звездное строение Млечного Пути, пятна на Солнце, фазы Венеры.

Галилей развил запрещенное в те времена церковью учение Коперника о движении Земли, за что в 1633 г. был осужден римским католическим судом. Приговор был отменен Ватиканом 350 лет спустя.

даже в наше время можно встретить людей, которые смотрят на движение так же, как смотрел Аристотель. Кажется нелепым движение повозки с постоянной скоростью, но без лошади!

В действительности же свободное тело, т. е. тело, которое не взаимодействует с другими телами, могло бы сохранять свою скорость постоянной сколь угодно долго или находиться в покое. Только действие со стороны другого тела способно изменить его скорость. Действовать на тело, чтобы поддерживать его скорость постоянной, нужно лишь потому, что в обычных условиях всегда существует сопротивление движению со стороны земли, воздуха или воды. Если бы не было этого сопротивления, то скорость автомобиля на горизонтальном шоссе и при выключенном двигателе оставалась постоянной.

Более глубокий взгляд на сущность механики

Мы выяснили, что скорость тела изменяется вследствие воздействия на него окружающих тел. Это означает, что ускорение тела в данный момент времени однозначно определяется расположением окружающих тел и в общем случае их скоростями относительно данного тела. Очень важно понять, что ускорение при фиксированном положении окружающих тел не может быть любым: его значение диктуется законами природы и не зависит от того, что происходило с телом в предшествующие моменты времени.

К скорости тела этот вывод не относится. Вектор скорости не определяется однозначно воздействием окружающих тел и в данный момент в данной точке пространства может быть любым в зависимости от того, что происходило с телом в предшествующие моменты времени.

Координаты тела также не определяются воздействием других тел единственным образом. В данный момент времени при фиксированном положении окружающих тел координаты тела могут быть любыми в зависимости от того, как двигалось тело перед этим (т. е. координаты зависят от начальных условий).

Например, при падении камня на землю его ускорение в каждой точке пространства определяется однозначно притяжением к Земле (и скоростью относительно воздуха, если сопротивление существенно). Скорость же тела в данной точке может быть любой и зависит от того, как было брошено тело: кто бросал (сильный или слабый), когда бросал, куда метил и т. д. (рис. 2.2).

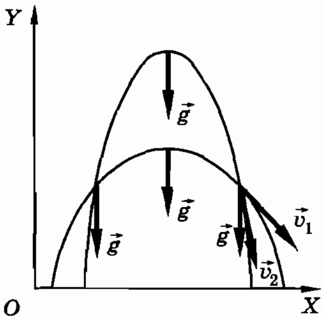


Рис. 2.2

Координаты камня в данный момент времени также могут быть любыми.

Короче говоря, наш мир устроен так, что ускорения тел строго определяются законами природы (законами механики Ньютона). Скорость же и координаты тела в данный момент времени зависят от того, что происходило с телом перед этим (от начальных условий), т. е. законами природы не определяются.

К этому вопросу мы еще вернемся в § 2.9.

Инерциальная система отсчета

До сих пор систему отсчета связывали с Землей, т. е. рассматривали движение относительно Земли. В системе отсчета, связанной с Землей, ускорение тела определяется действием на него других тел. Подобные системы отсчета называются инерциальными.

Однако в других системах отсчета может оказаться, что тело имеет ускорение даже в том случае, когда на него другие тела не действуют.

В качестве примера рассмотрим систему отсчета, связанную с движущимся автобусом. При резком торможении автобуса стоящие в проходе пассажиры падают вперед, получая ускорение относительно стенок автобуса (рис. 2.3). Однако это ускорение не вызвано каким-либо воздействием со стороны Земли или автобуса непосредственно на пассажиров. Относительно Земли пассажиры сохраняют свою постоянную скорость, но так как автобус замедляет свое движение, то люди наклоняются к его передней стенке.

Таким образом, когда на пассажира не действуют другие тела, он не получает ускорения в системе отсчета, связанной с

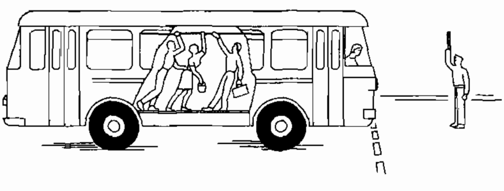


Рис. 2.3

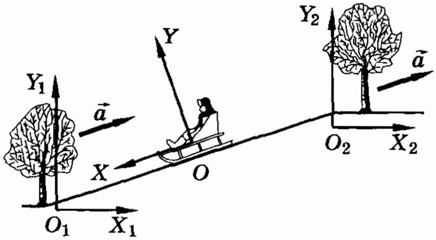


Рис. 2.4

Землей, но относительно системы отсчета, связанной со стенками автобуса, движущегося замедленно, пассажир имеет ускорение, направленное вперед.

Такой же результат получится, если связать систему отсчета с движущейся каруселью. Относительно карусели все тела, лежащие на земле, будут описывать окружности, т. е. будут двигаться с ускорением, хотя никаких внешних действий, вызывающих это ускорение, обнаружить нельзя.

Еще пример. Как объяснит мальчик, скатывающийся на санках с горы, что дерево на вершине горы да и сама гора удаляются от него все быстрее и быстрее, т. е. с ускорением? Никаких видимых причин для этого нет, но факт ускорения налицо (рис. 2.4).

Если относительно какой-нибудь системы отсчета тело движется с ускорением, не вызванным действием на него других тел, то такую систему называют неинерциальной. Так, неинерциальными являются системы отсчета, связанные с автобусом, движущимся по отношению к земле с ускорением, или с вращающейся каруселью.

В неинерциальных системах отсчета основное утверждение механики не выполняется.

Основное утверждение механики надо постараться понять и запомнить. Попробуйте проследить за его справедливостью, наблюдая в течение дня движение тел вокруг вас. Почему меняются скорости этих тел?

? Имеется ли принципиальное отличие системы отсчета, связанной с Землей, от системы отсчета, связанной с самолетом, делающим вираж?

§ 2.2. МАТЕРИАЛЬНАЯ ТОЧКА

Точку, движение которой мы рассматривали в кинематике, можно считать просто математической точкой. В динамике тоже рассматривается движение точки, но уже не математической, а материальной. Что это такое?

Возьмите лист плотной бумаги и подбросьте его. Он начнет медленно опускаться, слегка раскачиваясь из стороны в сторону. Если же этот лист скомкать, то он будет падать без раскачивания и гораздо быстрее. Обыкновенный волчок, состоящий из диска, насаженного на тонкую палочку, способен кружиться, не падая набок, пока скорость вращения велика. Заставить же вести себя подобным образом диск и палочку по отдельности просто невозможно.

С помощью подобных простых наблюдений нетрудно убедиться, что движение тел сильно зависит от их размеров и формы. Чем сложнее форма тела, тем, как правило, сложнее его движение. Трудно поэтому надеяться сразу найти какие-либо общие законы движения, которые были бы непосредственно справедливы для тел произвольной формы.

Основные законы механики Ньютона относятся не к произвольным телам, а к материальной точке: к телу, обладающему массой, но лишенному геометрических размеров.

Однако тел, обладающих массой, но лишенных геометрических размеров, в природе нет. В чем же тогда смысл этого понятия? В кинематике мы познакомились со способами описания движения точки. Под точкой понимались либо маленькая метка на теле, либо же само тело в том случае, когда пройденный им путь был много больше размеров тела. В динамике последнего уже недостаточно. Так, вращающееся колесо нельзя рассматривать как точку, какое бы большое расстояние ни прошло это колесо вместе с автомобилем.

Но размеры и форма тела во многих случаях не оказывают сколько-нибудь существенного влияния на характер механического движения. Вот в этих случаях мы и можем рассматривать тело как материальную точку, т. е. считать, что оно обладает массой, но не имеет геометрических размеров.

Причем одно и то же тело в одних случаях можно считать точкой, а в других нет. Все зависит от условий, при которых

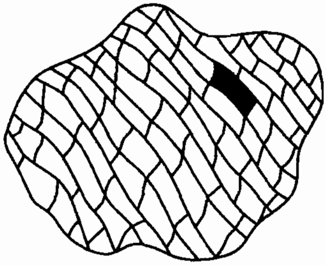


Рис. 2.5

происходит движение тела, и от того, что именно нас интересует. Например, при изучении орбитального движения планет вокруг Солнца и планеты, и Солнце можно считать материальными точками, так как расстояние между ними много больше их собственных размеров, а при этих условиях взаимодействие между телами не зависит заметным образом от формы тел. Но на движение искусственных спутников Земли форма Земли уже оказывает заметное влияние.

Еще один важный пример. При движении твердого тела, например кубика, соскальзывающего с доски, все части кубика движутся совершенно одинаково (такое движение называется поступательным). Поэтому кубик можно рассматривать как точку с массой, равной массе кубика. Но если тот же кубик вращается, считать его точкой нельзя: его разные части имеют существенно различные скорости.

Как быть в тех многочисленных случаях, когда тело нельзя считать материальной точкой? Выход есть, и он в принципе совсем несложен. Тело можно мысленно разделить на столь малые элементы, что каждый из них допустимо считать материальной точкой (рис. 2.5).

В механике любое тело можно рассматривать как совокупность большого числа материальных точек. Зная законы движения точки, мы в принципе располагаем методом описания движения произвольного тела.

Материальная точка — это простейшая модель реального тела. Если тело можно рассматривать как материальную точку, то задача исследования движения тела существенно упрощается.

? Можно ли считать материальной точкой камень, брошенный вверх?

§ 2.3. ПЕРВЫЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

Сейчас вы окончательно убедитесь в том, что движение есть столь же естественное состояние любого тела, как и покой, а потому не требует никакой причины.

Первый закон механики, или закон инерции, как его часто называют, был установлен еще Галилеем. Но строгую формулировку этого закона дал и включил его в число основных законов механики Ньютон. Закон инерции относится к самому простому случаю движения — движению тела, на которое не оказывают воздействия другие тела. Такие тела называются *свободными телами*.

Движение свободного тела

Ответить на вопрос, как движутся свободные тела, не обращаясь к опыту, нельзя. Однако нельзя поставить ни одного опыта, который бы в чистом виде показал, как движется ни с чем не взаимодействующее тело, так как таких тел нет. Как же быть?

Имеется лишь один выход. Надо создать для тела условия, при которых влияние внешних воздействий можно делать все меньшим и меньшим, и наблюдать, к чему это ведет. Можно, например, наблюдать за движением гладкого камня на горизонтальной поверхности, после того как ему сообщена некоторая скорость. (Притяжение камня к земле уравновешивается действием поверхности, на которую он опирается[1], и на скорость его движения влияет только трение.)

При этом легко обнаружить, что чем более гладкой является поверхность, тем медленнее будет уменьшаться скорость камня. На гладком льду камень скользит весьма долго, заметно не меняя скорость. Трение можно свести почти на нет с помощью воздушной подушки — струй воздуха, поддерживающих тело над твердой поверхностью, вдоль которой происходит движение. Этот принцип используется в водном транспорте (суда на воздушной подушке). На основе подобных наблюдений можно заключить: если бы поверхность была идеально гладкой, то при отсутствии сопротивления воздуха

---

[1] Если бы можно было убрать поверхность, по которой скользит тело, и «убрать» земной шар, то движение и в этом случае продолжалось бы с постоянной скоростью. Такое утверждение стало возможным лишь после того, как Земля «потеряла» свое привилегированное положение во Вселенной. Если Земля — «рядовое» космическое тело, то и состояние покоя по отношению к нему не является каким-то особым состоянием.

(в вакууме) камень совсем не менял бы своей скорости. Именно к такому выводу впервые пришел Галилей.

С другой стороны, нетрудно заметить, что, когда скорость тела меняется, всегда обнаруживается воздействие на него других тел (см. § 2.1).

Отсюда можно прийти к выводу, что тело, достаточно удаленное от других тел и по этой причине не взаимодействующее с ними, движется с постоянной скоростью.

Самое простое движение

Несомненно, что движение свободного тела — это самый простой случай движения, не осложненного внешними влияниями. А как наиболее простое движение описывается математически и каким оно будет? Каждый согласится, что это равномерное прямолинейное движение, описываемое формулой:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t, \text{ где } \vec{v} = const.$$

Знаменательное совпадение: физически наиболее простой случай движения (движение свободного тела) происходит по самому простому математическому закону (движение по прямой с постоянной скоростью). Это соображение, надо полагать, примирит вас с мыслью о том, что движение с постоянной скоростью, как и покой, — это естественное состояние тела, и оно не нуждается во внешней побудительной причине.

Закон инерции и относительность движения

Движение относительно, поэтому имеет смысл говорить лишь о движении тела по отношению к системе отсчета, связанной с другим телом. Сразу же возникает вопрос: будет ли свободное тело двигаться с постоянной скоростью по отношению к любому другому телу? Ответ, конечно, отрицательный. Так, если по отношению к Земле свободное тело движется прямолинейно и равномерно, то по отношению к вращающейся карусели тело заведомо так двигаться не будет.

Формулировка первого закона Ньютона

Наблюдения за движениями тел и размышления о характере этих движений приводят нас к заключению о том, что свободные тела движутся с постоянной скоростью по крайней мере по отношению к определенным телам и связанным с ними системам отсчета. Например, по отношению к Земле. В этом состоит главное содержание закона инерции. Поэтому первый закон динамики может быть сформулирован так:

существуют системы отсчета, называемые инерциальными, относительно которых тела, достаточно удаленные от всех других тел, движутся равномерно и прямолинейно.

Этот закон, с одной стороны, содержит определение инерциальной системы отсчета — системы отсчета, относительно которой свободные тела имеют постоянную скорость. С другой стороны, он содержит утверждение (которое с той или иной степенью точности можно проверить на опыте) о том, что инерциальные системы существуют в действительности. Первый закон механики ставит в особое, привилегированное положение инерциальные системы отсчета.

В инерциальной системе свободное тело может вращаться. В этом случае считать его материальной точкой нельзя. Любая часть тела движется с ускорением. Это ускорение сообщают ей воздействия со стороны остальных частей тела. Иными словами, часть вращающегося тела не является «свободным телом» и к ней первый закон Ньютона неприменим.

Примеры инерциальных систем отсчета

Как установить, что данная система отсчета является инерциальной? Это можно сделать только опытным путем. Именно опыт подтверждает, что с большой степенью точности систему отсчета, связанную с Землей (геоцентрическую систему отсчета, рис. 2.6), можно считать инерциальной. Но строго инерциальной она, как об этом будет рассказано позднее, не является.

С гораздо большей точностью можно считать инерциальной систему отсчета, в которой начало координат совмещено с центром Солнца, а координатные оси направлены к неподвижным звездам (рис. 2.7). Эту систему отсчета называют гелиоцентрической.

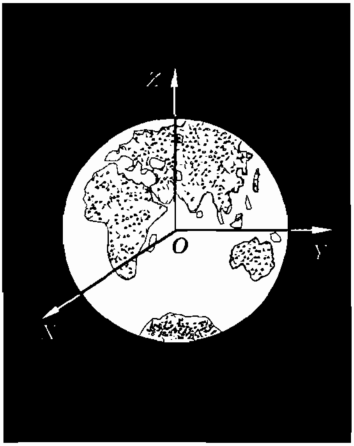


Рис. 2.6

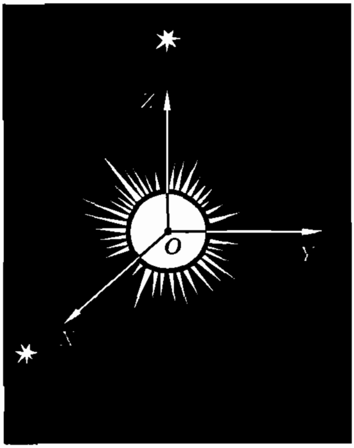


Рис. 2.7

Начиная с этого момента изучать механическое движение мы будем в инерциальных системах отсчета. В этих системах законы механического движения в самом общем случае выглядят наиболее просто.

Самый важный вопрос, который мы выяснили, — это характер движения свободного тела. В результате обобщения опытных фактов установили, что движение свободного тела происходит с постоянной скоростью. Но такое движение наблюдается не в любых системах отсчета, а в особых (привилегированных) системах, называемых инерциальными.

§ 2.4. СИЛА

В инерциальной системе отсчета тело движется с постоянной скоростью, если на него не действуют другие тела. Если такие действия есть, то скорость тела меняется — тело приобретает ускорение. Это воздействие тел друг на друга характеризуется силой.

Смысл введения понятия «сила»

Количественную меру действия тел друг на друга, в результате которого тела получают ускорения, называют в механике силой.

Это пока еще качественное, недостаточное для такой точной науки, как физика, определение. Введя его, мы разделили главное утверждение механики на два:

1) ускорение тел вызывается силами;

2) силы обусловлены действиями на данное тело каких-либо других тел.

Это разделение задачи о нахождении ускорения данного тела в зависимости от действия на данное тело других тел на две отдельные задачи существенно облегчает исследование. Связи между ускорениями и силами, с одной стороны, и между силами и конфигурацией тел, а также их относительными скоростями — с другой, более прозрачны, чем связи ускорений непосредственно с конфигурацией тел и их скоростями.

Понятие силы относится к двум телам

С самого начала нужно отчетливо представлять себе, что понятие силы относится к двум телам, а не к одному и не к многим. Всегда можно указать тело, на которое действует сила, и тело, со стороны которого она действует. Так, сила тяжести действует на камень со стороны Земли, а на шарик, прикрепленный к растянутой пружине, действует сила упругости со стороны пружины.

Сила имеет направление

Сила упругости растянутой пружины действует вдоль ее оси. Вы сами можете подействовать на лежащую на столе книгу мускульной силой в любом направлении. Это дает основание предположить, что сила является векторной величиной (т. е. характеризуется модулем и направлением). В дальнейшем это утверждение будет обосновано.

Сравнение сил

Для количественного определения силы мы должны уметь ее измерять. Только после этого можно говорить о силе как об определенной физической величине.

Но ведь действия на данное тело могут быть самыми разнообразными. Что общего, казалось бы, между силой притяжения Земли к Солнцу и силой, которая, преодолевая *тяготение, заставляет двигаться* ракету, или между этими двумя силами и обычной мускульной силой? Ведь они совершенно различны по своей природе. Можно ли говорить о них как о чем-то физически родственном? Можно ли сравнивать их?

Когда человек не может поднять тяжелую вещь, он говорит: «Не хватает сил». При этом, в сущности, происходит сравнение двух совершенно разных по природе сил: мускульной силы и силы, с которой Земля притягивает этот предмет. Но если вы подняли тяжелый предмет и держите его на весу, то ничто не мешает вам утверждать, что мускульная сила ваших рук по модулю равна силе тяжести. Это утверждение, по существу, и является определением равенства сил в механике.

Две силы, независимо от их природы, считаются равными по модулю и противоположно направленными, если их одновременное действие на тело не меняет его скорость (т. е. не сообщает телу ускорения).

Это определение позволяет измерять силы, если одну из них принять за единицу.

Измерение сил

Для измерения сил надо располагать эталоном единицы силы.

В качестве эталона единицы силы выберем силу $\vec{F}_0$, *с которой некоторая определенная (эталонная) пружина при фиксированном растяжении действует на прикрепленное к ней тело* (рис. 2.8). Сила упругости пружины направлена вдоль оси пружины. (Необязательно брать именно пружину; можно использовать любое упругое тело, деформацию которого легко измерить.)

Теперь установим способ сравнения сил с эталонной силой.

Мы уже говорили, что две силы считаются равными по модулю и противоположными по направлению, если при одновременном действии они не сообщают телу ускорения. Следовательно, измеряемая сила $\vec{F}$ равна по модулю эталонной силе $\vec{F}_0$ и направлена в противоположную сторону,

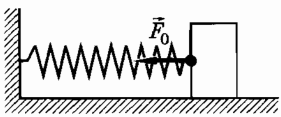


Рис. 2.8

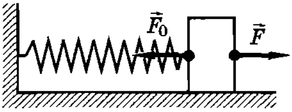


Рис. 2.9

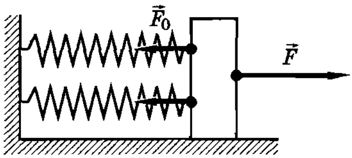


Рис. 2.10

если под действием этих сил тело не получает ускорения (рис. 2.9). Причем сила $\vec{F}$ может быть любой природы: силой упругости другой пружины, силой трения, мускульной силой и т. д.

При действии по одному направлению двух сил $\vec{F}_0$ (рис. 2.10) будем считать, что измеряемая сила $\vec{F}$, направленная в противоположную сторону, по модулю равна $2\vec{F}_0$, если все три силы, действуя одновременно на тело, не сообщают ему ускорения.

Таким образом, располагая эталоном силы, можно измерять силы, кратные эталону. Процедура измерения состоит в следующем: к телу, на которое действует измеряемая сила, прикладывают в сторону, противоположную ее направлению, такое количество эталонных сил, чтобы тело не получило ускорения, и подсчитывают число эталонных сил. Естественно, что при этом ошибка в измерении произвольной силы будет такой же, как сама эталонная сила $\vec{F}_0$. Выбрав эталонную силу достаточно малой, можно в принципе проводить измерения с требуемой точностью.

Динамометр

На практике для измерения сил применяют одну пружину, проградуированную на различные значения силы, — динамометр (рис. 2.11). Использование динамометра основано на том факте, что сила упругости пружины в определенных пределах прямо пропорциональна ее деформации. Поэтому по длине растянутой пружины можно непосредственно судить о значении силы.

Геометрическое сложение сил

Располагая методом измерения сил, можно опытным путем доказать, что силы складываются, как векторы. Именно это да-

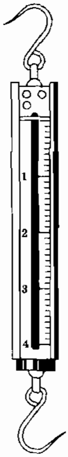


Рис. 2.11

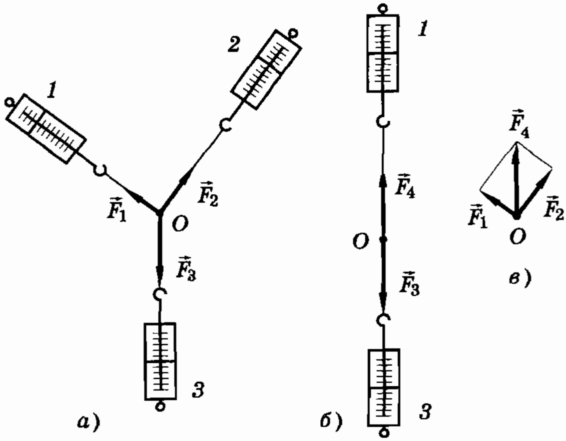


Рис. 2.12

ет основание считать силу, подобно скорости и ускорению, векторной величиной.

Один из простых опытов, доказывающих, что силы надо складывать векторно, можно осуществить так.

Нужно взять три нити и связать их концы узлом. На свободных концах нитей сделать петли и надеть их на крючки трех динамометров. После этого все три динамометра укрепить на доске гвоздями так, чтобы их пружины были растянуты (рис. 2.12, *а*). На узел *O* будут действовать со стороны динамометров три силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$, значения которых определяются показаниями динамометров. На листе бумаги, закрепленном на доске, надо отметить положение узла *O*, направления всех трех нитей и значения сил в произвольном масштабе.

После этого динамометр *2* отцепляется, а динамометр *1* снимается с гвоздя и закрепляется в новом положении так, чтобы узел *O* остался на прежнем месте, а направление нити, прикрепленной к динамометру *3*, и его показания не изменились (рис. 2.12, *б*). Показание динамометра *1* будет, очевидно, совпадать с показанием динамометра *3*, так как узел *O* находится в равновесии.

Можно утверждать, что пружина динамометра *1* в новом положении оказывает на узел *O* точно такое же действие, как и два динамометра *1* и *2* при начальном расположении динамометров. Это означает, что сила $\vec{F}_4$ по своему действию эквивалентна силам $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ и является их равнодействующей.

Отметим на бумаге направление силы $\vec{F}_4$ и ее значение в том же масштабе, что и раньше. Сняв динамометры с доски, соединим концы отрезков, изображающих силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_4$. Получится параллелограмм, показанный на рисунке 2.12, *в*.

Можно повторить опыт, меняя расположения динамометров и растяжения их пружин. Во всех случаях полученная при аналогичных построениях фигура будет представлять собой параллелограмм. В частности, если $F_1 = 3$ ед., $F_2 = 4$ ед., то $F_3 = F_4 = 5$ ед. При этом нити *1* и *2* образуют прямой угол. Согласно теореме Пифагора

$$F_3 = F_4 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = 5 \text{ ед.},$$

как это и получается экспериментально.

Итак, сила $\vec{F}_4$, эквивалентная силам $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, является диагональю параллелограмма, стороны которого изображают силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Следовательно, силы складываются, как векторы. По этой причине, рассказывая о способах измерения сил, мы применяли для них векторные обозначения.

О силах в механике

Нам еще предстоит в дальнейшем довольно обстоятельный разговор о силах. Пока же ограничимся несколькими замечаниями.

В механике не рассматривается природа тех или иных сил. Не делается попыток выяснить, вследствие каких физических процессов появляются те или иные силы. Это задача других разделов физики.

В механике важно лишь знать, при каких условиях возникают силы и каковы их модули и направления, т. е. знать, как силы зависят от расстояний между телами и от скоростей их движения. А узнать значения сил, определить, когда и как они действуют, можно, не вникая в природу сил, а лишь располагая способами их измерения.

В механике в первую очередь имеют дело с тремя видами сил: гравитационными силами, силами упругости и силами трения. Модули и направления этих сил определяются опытным путем. Важно, что все рассматриваемые в механике силы зависят либо только от расстояний между телами или частями одного тела (гравитация и упругость), либо только от относительных скоростей тел (трение).

Дано определение силы и указан метод ее измерения. Доказано, что силы складываются как векторы.

§ 2.5. СВЯЗЬ МЕЖДУ УСКОРЕНИЕМ И СИЛОЙ

Ускорения тел определяются действующими на них силами. После того как мы научились измерять силу и знаем в принципе, как определять ускорение, можно ответить на главный вопрос: «Как зависит ускорение тела от действующих на него сил?»

Экспериментальное определение зависимости ускорения от силы

Установить на опыте связь между ускорением и силой с абсолютной точностью нельзя, так как любое измерение дает приблизительное значение измеряемой величины. Но подметить характер зависимости ускорения от силы можно с помощью несложных опытов. Уже простые наблюдения показывают, что чем больше сила, тем быстрее меняется скорость тела, т. е. тем больше его ускорение. Естественно предположить, что ускорение прямо пропорционально силе. В принципе, конечно, зависимость ускорения от силы может быть более сложной, но сначала надо посмотреть, не справедливо ли самое простое предположение.

Лучше всего изучать поступательное движение тела, например металлического бруска, по горизонтальной поверхности стола, так как только при поступательном движении ускорение всех точек одно и то же, и мы можем говорить об определенном ускорении тела в целом. Однако в этом случае сила трения о стол велика и, главное, ее трудно точно измерить[1].

Поэтому возьмем тележку с легкими колесами и установим ее на рельсы. Тогда сила трения сравнительно невелика, а мас-

[1] Лучше использовать движение бруска на воздушной подушке (см. § 2.3).

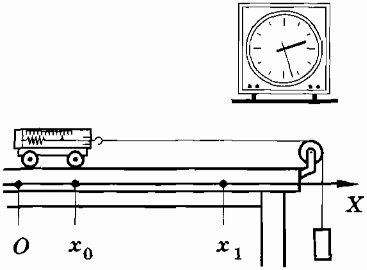


Рис. 2.13

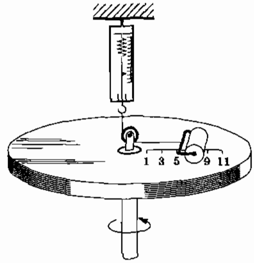


Рис. 2.14

сой колес можно пренебречь по сравнению с массой тележки, движущейся поступательно (рис. 2.13).

Пусть на тележку действует постоянная сила со стороны нити, к концу которой прикреплен груз. Модуль силы измеряется пружинным динамометром. Эта сила постоянна, но не равна при движении силе, с которой Земля притягивает подвешенный груз. Измерить ускорение тележки непосредственно, определяя изменение ее скорости за малый интервал времени, весьма затруднительно. Но его можно оценить, измеряя время t, затрачиваемое тележкой на прохождение пути s.

Учитывая, что при действии постоянной силы ускорение тоже постоянно, так как оно однозначно определяется силой, можно использовать кинематические формулы равноускоренного движения. При начальной скорости, равной нулю,

$$s = x_1 - x_0 = \frac{at^2}{2},$$

где x_0 и x_1 — начальная и конечная координаты тела.

Отсюда

$$a = \frac{2s}{t^2}. \qquad (2.5.1)$$

Непосредственно на глаз видно, что тележка тем быстрее набирает скорость, чем больше действующая на нее сила. Тщательные измерения модулей силы и ускорения показывают прямую пропорциональность между ними:

$$a \sim F.$$

Существуют и другие опыты, подтверждающие эту связь. Вот один из них. Массивный каток (рис. 2.14) установлен на платформе. Если привести платформу во вращение, то каток под действием натянутой нити приобретает центростремительное ускорение, которое легко определить по радиусу вращения R и числу оборотов в секунду n:

$$a = 4\pi^2 n^2 R.$$

Силу найдем из показаний динамометра. Изменяя число оборотов и сопоставляя F и a, убедимся, что $F \sim a$.

Если на тело одновременно действует несколько сил, то модуль ускорения тела будет пропорционален модулю геометрической суммы всех этих сил, равной:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots . \qquad (2.5.2)$$

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{F}$ направлены по одной прямой в одну и ту же сторону:

$$\vec{a} \sim \vec{F}. \qquad (2.5.3)$$

Это видно на опыте с тележкой: ускорение тележки направлено вдоль привязанной к ней нити.

Что такое инерция?

Согласно механике Ньютона сила однозначно определяет ускорение тела, но не его скорость. Это нужно очень отчетливо представлять себе. Сила определяет не скорость, а то, как быстро она изменяется. Поэтому покоящееся тело приобретет заметную скорость под действием силы лишь за некоторый интервал времени.

Ускорение возникает сразу, одновременно с началом действия силы, но скорость нарастает постепенно. Даже очень большая сила не в состоянии сообщить телу сразу значительную скорость. Для этого нужно время. Чтобы остановить тело, опять-таки нужно, чтобы тормозящая сила, как бы она ни была велика, действовала некоторое время.


Рис. 2.15

Именно эти факты имеют в виду, когда говорят, что тела инертны. Приведем примеры простых опытов, в которых очень наглядно проявляется инертность тел.

1. Массивный шар подвешен на тонкой нити, внизу к нему привязана точно такая же нить (рис. 2.15). Если медленно тянуть за нижнюю

нить, то, как и следовало ожидать, рвется верхняя нить. Ведь на нее действует и вес шара, и сила, с которой мы тянем шар вниз. Однако если за нижнюю нить очень быстро дернуть, то оборвется именно она, что на первый взгляд довольно странно. Но это легко объяснить. Когда мы тянем за нить медленно, то шар постепенно опускается, растягивая верхнюю нить до тех пор, пока она не оборвется.

При быстром рывке с большой силой шар получает большое ускорение, но скорость его не успевает увеличиться сколько-нибудь значительно за тот малый промежуток времени, в течение которого нижняя нить сильно растягивается, поэтому именно она и обрывается, а верхняя нить растягивается мало и остается целой.

2. Интересен опыт с длинной палкой, подвешенной на бумажных кольцах (рис. 2.16). Если резко ударить по палке железным стержнем, то палка ломается, а бумажные кольца остаются невредимыми. Этот опыт вы постарайтесь объяснить сами.

3. Еще более простой опыт можно выполнить дома. Идея опыта ясна из рисунка 2.17. Левая часть рисунка соответствует ситуации, когда $\vec{v} = \mathrm{const}$ или $a = 0$. На правой части рисунка $\vec{v} \neq \mathrm{const}$, т. е. $a \neq 0$.

4. Наконец, самый, пожалуй, эффектный опыт. Если выстрелить в пустой пластмассовый сосуд, пуля оставит в стенках отверстия, но сосуд останется целым. Если же выстрелить в такой же сосуд, заполненный водой, то сосуд разорвется на мелкие части. Этот результат опыта объясняется так. Вода очень мало сжимаема, и небольшое изменение ее объема приводит к резкому возрастанию давления. Когда пуля очень быстро входит в воду, пробив стенки сосуда, давление резко возрастает. Из-за инертности воды ее уровень не успевает повыситься и возросшее давление разрывает сосуд на части.

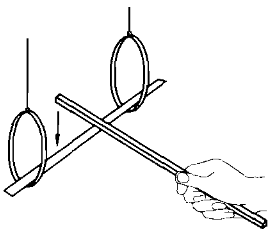


Рис. 2.16

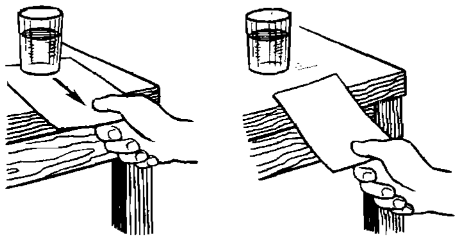


Рис. 2.17

Иногда говорят, что благодаря инерции тело «сопротивляется» попыткам изменить его скорость. Это не совсем верно. Тело всегда меняет скорость под действием силы, но изменение скорости требует времени. Как подчеркивал Дж. Максвелл, говорить о сопротивлении тела попыткам изменить его скорость так же неправильно, как и говорить о том, что чай «сопротивляется» тому, чтобы стать сладким. Просто нужно некоторое время для растворения сахара.

Законы механики и повседневный опыт

Основное утверждение механики достаточно наглядно и не сложно. Оно без особого труда укладывается в нашем сознании. Ведь мы с рождения живем в мире тел, движение которых подчиняется законам механики Ньютона.

Но иногда приобретенные из жизненного опыта представления могут подвести. Так, слишком укоренилось представление о том, что скорость тела направлена в ту же сторону, куда направлена приложенная к нему сила. На самом же деле сила определяет не скорость, а ускорение тела, и направление скорости и силы могут не совпадать. Это хорошо видно на рисунке 2.18.

При движении тела, брошенного под углом к горизонту, сила тяжести все время направлена вниз, и скорость, касательная к траектории, образует с силой некоторый угол, который в процессе полета тела изменяется.

Направление силы совпадает с направлением скорости только в частном случае прямолинейного движения с растущей по модулю скоростью.

Установлен главный для динамики факт: ускорение тела прямо пропорционально действующей на него силе.

?

1. Нить, на которой подвешен шарик, отклонили на некоторый угол и отпустили. Куда направлена равнодействующая сил, действующих на шарик, в момент, когда нить вертикальна?
2. Начертите на полу небольшой круг и устройте соревнование. Каждый участник быстро идет по прямой в направлении к кругу, держа в руке теннисный мячик. Задача состоит в том, чтобы выпущенный из рук мячик попал в круг. Это соревнование покажет, кто из вас лучше понимает сущность механики Ньютона.

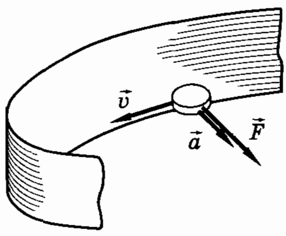


Рис. 2.18

§ 2.6. ВТОРОЙ ЗАКОН НЬЮТОНА. МАССА

Ускорение тела определяется действующей на него силой. Но оно зависит и от свойств самого тела. Выясним характер этой зависимости и введем новую физическую величину — массу.

От чего зависит ускорение тел? Каждый без труда за несколько секунд разгонит легкую байдарку до большой скорости, но сделать то же самое с тяжело нагруженной лодкой он будет не в состоянии.

Еще пример. Стоит отпустить тетиву лука, как легкая стрела в доли секунды разовьет большую скорость. А попробуйте вместо стрелы взять кусок водопроводной трубы. Тот же лук сможет лишь едва-едва сдвинуть его с места.

Эти примеры говорят о том, что *модуль ускорения тела зависит не только от оказываемого на него воздействия (т. е. от силы), но и от свойств тела.* Отсюда следует, что необходимо ввести величину, которая характеризовала бы способность того или иного тела менять свою скорость под влиянием определенной силы. Такой величиной в механике является масса тела. *Чем больше масса тела, тем меньше получаемое телом ускорение при действии на него заданной силы.*

Масса

Прямая пропорциональность между модулями ускорения и силы (2.5.3) означает, что отношение модуля силы к модулю ускорения является постоянной величиной, не зависящей от силы[1]:

$$\frac{F}{a} = \text{const}.$$

---

[1] Вспомните: для равномерного движения было установлено, что пройденный путь прямо пропорционален времени: $s \sim t$. Поэтому отношение $\frac{s}{t}$ не зависит ни от s, ни от t и представляет собой постоянную величину, которую мы назвали скоростью: $v = \frac{s}{t}$.

Нагружая тележку гирями (см. рис. 2.13), легко заметить, что чем больше гирь на ней находится, тем медленнее она будет набирать скорость, т. е. тем меньше ее ускорение. Поэтому для нагруженной тележки отношение $\frac{F}{a}$ больше, чем для ненагруженной. Это как раз и означает, что ускорение зависит не только от силы, но и от свойств самого тела.

Величину $\frac{F}{a}$, равную отношению модуля силы к модулю ускорения, называют массой (точнее, инертной массой) тела.

Масса — основная динамическая характеристика тела, количественная мера его инертности, т. е. способности тела приобретать определенное ускорение под действием силы. Для данного тела ускорение пропорционально силе, и коэффициентом пропорциональности является масса.

Многим из вас это определение массы может показаться очень неглубоким, «скучным». Ведь оно не объясняет главного: почему у тел вообще есть масса, каково ее физическое происхождение. К сожалению, все это справедливо. Природу массы пока не понимает никто. Никто не может объяснить, почему элементарные частицы имеют те или иные массы. Но приведенное определение массы позволяет ее измерить, а по известной массе точнейшим образом рассчитывать движения тел. А это и есть основная задача механики.

Второй закон Ньютона

Введя понятие массы, сформулируем окончательно второй закон Ньютона:

произведение массы тела на его ускорение равно действующей на тело силе:

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}.} \qquad (2.6.1)$$

Эта короткая формула выражает один из самых фундаментальных законов природы, которому с удивительной точностью подчиняются движения как громадных небесных тел, так и мельчайших песчинок, гонимых ветром. С помощью этого закона можно рассчитывать движение поршня в цилиндре автомобиля и сложнейшие траектории космических кораблей.

Уверенность в справедливости второго закона Ньютона основывается не на результатах отдельных опытов, которые позволяют подойти к формулировке этого закона, а на том, что все вытекающие из него следствия, проверяемые как специальными опытами, так и всей человеческой практикой, оказываются правильными.

Заметим, что если на тело не действуют силы или их сумма равна нулю ($\vec{F} = 0$), то относительно инерциальной системы отсчета $\vec{a} = 0$ и, следовательно, $\vec{v} = \text{const}$. Однако это не означает, что первый закон Ньютона есть следствие второго. В первом законе содержится утверждение о существовании инерциальных систем отсчета. Второй закон Ньютона справедлив именно для этих систем.

Измерение массы

В приведенной формулировке второго закона содержится проверяемое на опыте утверждение о том, что ускорение прямо пропорционально силе, и одновременно определение массы.

Используя второй закон Ньютона, можно вычислить массу тела, измерив независимо силу и ускорение:

$$m = \frac{F}{a}. \qquad (2.6.2)$$

Правда, на практике гораздо точнее и удобнее измерять массу с помощью весов. Об этом будет рассказано в дальнейшем.

Если измерить массы m_1, m_2, m_3 нескольких, например трех, тел, а затем соединить эти тела вместе и измерить массу m одного объединенного тела, то будет выполняться простое соотношение:

$$m = m_1 + m_2 + m_3.$$

Справедливо и обратное: если разделить тело на части, то сумма масс этих частей будет равна массе тела до разделения.

Впрочем (об этом пойдет речь в других разделах курса), данные утверждения не являются абсолютно точными. Не является также точным утверждение механики Ньютона о постоянстве массы тела, независимости ее от скорости движения. Это справедливо лишь для скоростей движения тел, много меньших скорости света.

Сформулирован основной закон динамики — второй закон Ньютона: $m\vec{a} = \vec{F}$. Его нужно запомнить в первую очередь и понимать смысл всех трех величин, входящих в этот закон.

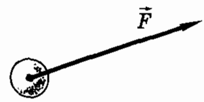


Рис. 2.19

? К центру шара приложена сила $\vec{F}$ (рис. 2.19). Куда движется шар? (Это самая простая задача на второй закон Ньютона.)

§ 2.7. ТРЕТИЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

Третий закон Ньютона выражает одно общее свойство всех сил, рассматриваемых в механике. Состоит это свойство в том, что любые действия тел друг на друга носят характер взаимодействия. Это означает, что если тело A действует на тело B, сообщая ему ускорение, то и тело B действует на тело A, также сообщая ему ускорение.

Взаимодействие тел

Примеров взаимодействия тел можно привести сколь угодно много. Когда вы, находясь в одной лодке, начнете за веревку подтягивать другую, то и ваша лодка обязательно продвинется вперед (рис. 2.20). Действуя на вторую лодку, вы заставляете ее действовать на вашу лодку.

Если вы ударите ногой по футбольному мячу, то немедленно ощутите обратное действие на ногу. Нельзя толкнуть плечом кого-либо, не испытав обратного действия на ваше плечо. Все это проявления общего закона взаимодействия тел.

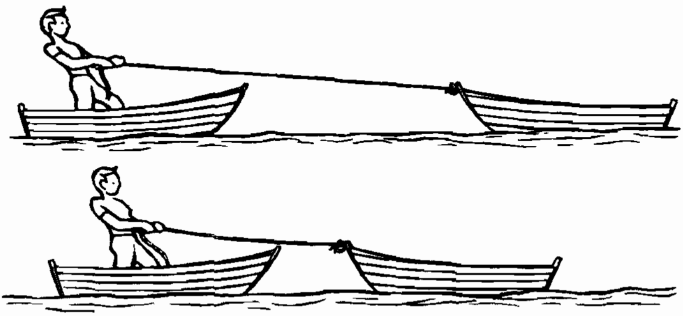


Рис. 2.20

Действия тел друг на друга носят характер взаимодействия не только при непосредственном контакте тел. Положите, например, на гладкий стол два сильных магнита разноименными полюсами навстречу друг другу, и вы тут же обнаружите, что магниты начнут двигаться навстречу друг другу.

Заметные изменения скоростей обоих взаимодействующих тел наблюдаются, однако, лишь в тех случаях, когда массы этих тел не сильно отличаются друг от друга. Если же взаимодействующие тела значительно различаются по массе, заметное ускорение получает только то из них, которое имеет меньшую массу. Так, при падении камня Земля заметно ускоряет движение камня, но ускорение Земли (а ведь камень тоже притягивает Землю) практически обнаружить нельзя, так как оно очень мало.

Силы взаимодействия двух тел

Выясним с помощью опыта, как связаны между собой силы взаимодействия двух тел.

Возьмем достаточно сильный магнит и железный брусок и положим их на катки, чтобы уменьшить трение о стол (рис. 2.21). К магниту и бруску прикрепим одинаковые мягкие пружины, зацепленные другими концами на столе. Магнит и брусок притянутся друг к другу и растянут пружины. Опыт показывает, что к моменту прекращения движения пружины оказываются растянутыми совершенно одинаково. Это означает, что на оба тела со стороны пружин действуют одинаковые по модулю и противоположные по направлению силы:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2. \qquad (2.7.1)$$

Так как магнит покоится, то сила $\vec{F}_2$ равна по модулю и противоположна по направлению силе $\vec{F}_4$, с которой на него действует брусок:

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_4. \qquad (2.7.2)$$

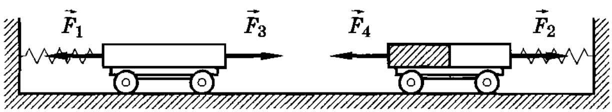


Рис. 2.21

Точно так же равны по модулю и противоположны по направлению силы, действующие на брусок со стороны магнита и пружины:

$$\vec{F}_3 = -\vec{F}_1. \qquad (2.7.3)$$

Из равенств (2.7.1), (2.7.2), (2.7.3) следует, что силы, с которыми взаимодействуют магнит и брусок, равны по модулю и противоположны по направлению:

$$\vec{F}_3 = -\vec{F}_4. \qquad (2.7.4)$$

Третий закон Ньютона

На основе этого и подобных опытов можно сформулировать третий закон Ньютона.

Силы, с которыми тела действуют друг на друга, равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны.

Это означает, что если на тело A со стороны тела B действует сила $\vec{F}_A$ (рис. 2.22), то одновременно на тело B со стороны тела A действует сила $\vec{F}_B$, причем

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B. \qquad (2.7.5)$$

Рис. 2.22

Используя второй закон Ньютона, можно равенство (2.7.5) записать так:

$$m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2. \qquad (2.7.6)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1} = \text{const}. \qquad (2.7.7)$$

Отношение модулей a_1 и a_2 ускорений взаимодействующих тел определяется обратным отношением их

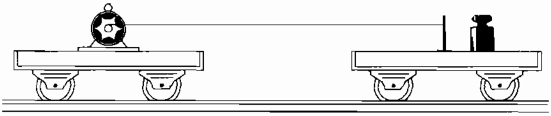


Рис. 2.23

масс и совершенно не зависит от природы действующих между ними сил[1].

Как уже говорилось в начале этого параграфа, более массивное тело получает небольшое ускорение, а менее массивное — значительно большее.

В этом можно убедиться на следующем простом опыте. Поставим на гладкие рельсы две тележки одинаковой массы и на одной из них закрепим небольшой электрический двигатель, на вал которого может наматываться нить, привязанная к другой тележке, а на другую поставим гирю, масса которой равна массе двигателя (рис. 2.23). При работающем двигателе обе тележки устремляются с одинаковыми ускорениями навстречу друг другу и проходят одинаковые пути. Если массу одной из тележек сделать вдвое большей, то ее ускорение окажется в два раза меньше, чем другой, и за то же время она пройдет вдвое меньший путь.

Связь ускорений взаимодействующих тел с их массами можно установить и на таком опыте (рис. 2.24). На горизонтальную платформу помещают два катка разной массы, соединенные нитью. Опыт покажет, что можно найти такое положение катков, когда они при вращении платформы не перемещаются по ней. Измерив радиусы обращения катков вокруг центра платформы, определим отношение центростремительных ускорений катков:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\omega^2 R_1}{\omega^2 R_2} \text{ или } \frac{a_1}{a_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Сравнив это отношение с обратным отношением масс тел $\frac{m_2}{m_1}$, убеждаемся, что $\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}$ при любых скоростях вращения платформы.

---

[1] Здесь имеется в виду, что никакие другие силы, кроме сил взаимодействия, на эти тела не действуют.

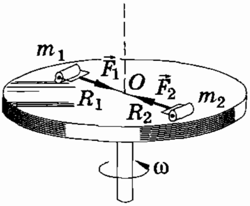


Рис. 2.24

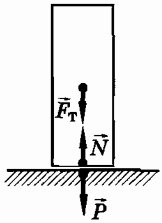


Рис. 2.25

Важное замечание

Надо помнить, что силы, о которых идет речь в третьем законе Ньютона, приложены к разным телам и поэтому не могут уравновешивать друг друга.

Непонимание этого часто приводит к недоразумениям. Так, иногда с помощью третьего закона Ньютона пытаются объяснить, почему то или иное тело находится в покое. Например, утверждают, что мел на столе покоится якобы потому, что сила тяжести $\vec{F}_т$, действующая на тело, согласно третьему закону Ньютона, равна по модулю и противоположна по направлению силе упругости $\vec{N}$ (силе реакции опоры), действующей на него со стороны стола. На самом деле равенство $\vec{F}_т + \vec{N} = 0$ является следствием второго закона Ньютона, а не третьего: ускорение равно нулю, поэтому и сумма сил, действующих на тело, равна нулю. Из третьего же закона Ньютона вытекает лишь, что сила реакции опоры $\vec{N}$ равна по модулю силе $\vec{P}$, с которой мел давит на стол (рис. 2.25). Эти силы приложены к разным телам и направлены в противоположные стороны.

На следующий вопрос ответьте самостоятельно: лошадь тянет сани, а сани действуют на лошадь с такой же по модулю силой, направленной в противоположную сторону. Почему же лошадь везет сани, а не наоборот?

О значении третьего закона Ньютона

Главное значение третьего закона Ньютона обнаруживается при исследовании движения системы материальных точек или системы тел. Этот закон позволяет, как мы увидим в дальнейшем, доказать важные теоремы динамики и сильно упрощает изучение движения тел в тех случаях, когда их нельзя рассматривать как материальные точки.

Ньютон сформулировал третий закон динамики так: действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе — действия двух тел друг на друга равны и направлены в противоположные стороны.

§ 2.8. ЕДИНИЦЫ МАССЫ И СИЛЫ. ПОНЯТИЕ О СИСТЕМЕ ЕДИНИЦ

Единица массы — килограмм — известна всем. С единицей силы — ньютоном — вы познакомитесь сейчас.

Основные и производные единицы физических величин

В кинематике мы пользовались двумя основными физическими величинами — длиной и временем. Для единиц этих величин установлены соответствующие эталоны, сравнением с которыми определяется любая длина и любой интервал времени. Единицей длины является метр, а единицей времени — секунда. Все другие кинематические величины не имеют эталонов единиц. Единицы таких величин называются производными. Связь производных единиц с единицами основных величин в кинематике вытекает из самих определений производных величин.

При переходе к динамике мы должны ввести еще одну основную единицу и установить ее эталон. Дело в том, что второй закон Ньютона содержит две новые, динамические величины — силу и массу. Ни одну из этих величин нельзя выразить только через кинематические величины.

С равным правом можно считать основной величиной как силу, так и массу. Выбрав для единицы одной из этих величин эталон, получают единицу для другой, используя второй закон Ньютона. Соответственно получаются две различные системы единиц.

Вводя понятие силы, мы говорили о том, что в качестве эталона единицы силы можно взять пружину, растянутую определенным образом. Однако практически такой эталон силы неудобен, так как, во-первых, трудно изготовить две пружины с совершенно одинаковыми свойствами, а во-вторых, упругие свойства пружин могут несколько изменяться с течением времени и в зависимости от окружающих условий, например от температуры. Лучше в качестве единицы силы взять силу, с которой Земля притягивает определенную эталонную гирю.

Международная система единиц

В настоящее время наиболее широко в физике и технике применяется система единиц, в которой в качестве основной величины взята не сила, а масса. Единица же силы устанавливается на основе второго закона Ньютона.

В Международной системе единиц (СИ)[1] за единицу массы — один килограмм (1 кг) — принята масса эталонной гири, выполненной в форме прямого цилиндра высотой 39 мм, равной диаметру, из сплава платины и иридия. Эталон килограмма хранится в Международном бюро мер и весов в Севре, близ Парижа. Точные копии этой гири имеются во всех странах. Приближенно массу 1 кг имеет 1 л воды при комнатной температуре. Легко осуществимые способы сравнения массы любого тела с массой эталона путем взвешивания мы рассмотрим позднее.

За единицу силы в Международной системе единиц принимается сила, которая телу массой 1 кг сообщает ускорение 1 м/с².

Эта единица силы называется ньютоном (сокращенно — Н). Единица силы — ньютон — выражается через основные единицы СИ так:

$$1\text{Н} = 1\ \text{кг} \cdot 1\ \text{м/с}^2 = 1\ \text{кг} \cdot \text{м/с}^2.$$

Другие системы единиц

Длительное время в физике использовалась и достаточно широко используется в настоящее время (особенно в теоретической физике) система единиц СГС.

За единицу длины в этой системе принят сантиметр (1 см $= 10^{-2}$ м), за единицу массы — грамм (1 г $= 10^{-3}$ кг), а единицей времени служит секунда (1 с).

За единицу силы в системе СГС принимается сила, которая телу массой 1 г *сообщает ускорение* 1 см/с². Эта единица называется диной (1 дин).

---

[1] Международная система единиц (международное сокращенное наименование SI, в русской транскрипции — СИ) принята в 1960 г. XI Генеральной конференцией по мерам и весам (ГКМВ) и уточнена на последующих ГКМВ.

Так как 1 г = 0,001 кг, а 1 см = 0,01 м, то 1 Н = 100 000 дин = $= 10^5$ дин. В технике используется еще одна единица силы, называемая килограмм-силой (1 кгс). За 1 кгс принята сила, с которой Земля притягивает к себе эталонную гирю массой 1 кг. Применяется также дольная единица — грамм-сила (1 гс):

$$1 \text{ кгс} = 1000 \text{ гс}.$$

О массе в 1 кг и силе в 1 кгс каждый имеет определенное представление. Сила 1 Н примерно в 10 раз меньше 1 кгс. Точное соотношение между 1 Н и 1 кгс мы получим позднее.

Дина — очень малая единица силы. Она почти в миллион раз меньше силы в 1 кгс.

Несколько примеров значений сил: 100-граммовая гирька, поставленная на руку, действует на нее с силой 1 Н.

Сила мышц руки при сдавливании пружинного динамометра 350—400 Н.

Упираясь ногами в пол, вы можете растянуть пружину с силой около 1000 Н.

Электрон притягивается к протону в атоме водорода с силой порядка 10^{-8} Н, а на протон в ускорителе элементарных частиц действует сила 10^{-12} Н.

Сила тяги колесного трактора около $6 \cdot 10^4$ Н, а двигателя первой ступени космического корабля $4 \cdot 10^8$ Н.

Земля притягивает Луну с силой $2 \cdot 10^{22}$ Н.

После того как введены единицы массы и силы, мы можем выражать эти величины определенными числами.

§ 2.9. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ

С помощью законов Ньютона мы можем не только объяснять наблюдаемые механические явления, но и предсказывать их течение.

Основная (прямая) задача механики

Основная задача механики состоит в нахождении положения и скорости тела в любой момент времени, если известны его положение и скорость в начальный момент времени и действующие на него силы.

Эта задача решается с помощью второго закона Ньютона — основного закона классической механики:

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots . \qquad (2.9.1)$$

Его часто называют **уравнением движения.**

Так как ускорение и сила — величины векторные, то уравнение (2.9.1) фактически является компактной записью трех независимых уравнений:

$$\begin{aligned} ma_x &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \ldots, \\ ma_y &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \ldots, \\ ma_z &= F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \ldots, \end{aligned} \qquad (2.9.2)$$

где a_x, a_y, a_z — проекции вектора ускорения на оси координатной системы отсчета, а F_{ix}, F_{iy}, F_{iz} — проекции векторов сил на те же оси. В случае движения на плоскости достаточно двух уравнений в проекциях, а в случае прямолинейного — одного.

Обычно нам бывают известны из опыта силы как функции координат и скоростей. Зная силы и массу, легко определить проекции ускорения с помощью уравнений (2.9.2).

Но ускорение, как вы знаете из кинематики, не определяет однозначно скорость тела и его координаты. Так, в случае постоянной проекции ускорения a_x на ось X проекция скорости v_x и координата x находятся из уравнений:

$$v_x = v_{0x} + a_x t, \qquad (2.9.3)$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}. \qquad (2.9.4)$$

Таким образом, для определения проекции скорости в произвольный момент времени нужно знать проекцию начальной скорости v_{0x} (проекцию в начальный момент времени $t_0 = 0$), а для определения координаты требуется еще знание начальной координаты x_0.

Если же сила меняется с течением времени, то ускорение не остается постоянным. В этом случае формулы (2.9.3) и (2.9.4) уже не будут справедливыми для любого момента времени и зависимость координат и проекций скоростей от времени будет иметь гораздо более сложный вид. (Формулы (2.9.3) и (2.9.4) справедливы лишь для очень малых интервалов времени, в течение которых ускорение можно считать постоянным.)

Но по-прежнему для нахождения координат и проекций скоростей нужно знать начальные значения этих величин.

Расчет траектории космического корабля и его скорости в произвольный момент времени с учетом влияния как Земли, так и других планет — пример сложной задачи, решаемой с помощью электронных вычислительных машин. Необходимость использования ЭВМ связана еще и с тем, что космические корабли имеют большие скорости. Поэтому при коррекции траектории корабля необходимо обработать обширную информацию в очень короткое время.

Обратная задача механики

Кроме прямой задачи законы механики позволяют решать и обратную задачу. Она состоит в определении сил по известному или заданному движению, т. е. по зависимости координат, скоростей или ускорений от времени. Такую обратную задачу решил Ньютон, определяя силу тяготения по известным кинематическим законам движения планет (законам Кеплера). В настоящее время подобные задачи решаются при определении формы Земли и расположения в ней горных пород различной плотности посредством точного определения орбит спутников.

Часто приходится решать обратную задачу конструкторам: по заданному условиями работы движению деталей машины им приходится рассчитывать действующие на них силы. Это необходимо для правильного выбора материалов, формы и размеров деталей, обеспечивающих необходимую прочность.

Во многих случаях силы упругости в растянутых тросах можно определить по ускорению, сообщаемому ими телам, не прибегая к непосредственному измерению деформации тросов.

Зная массу тела и силу, можно определить ускорение в любой момент времени. По известному ускорению и начальной скорости можно найти скорость в любой момент времени. Зная скорость и начальные координаты, можно вычислить координаты в любой момент времени.

§ 2.10. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

Познакомимся с методом решения задач механики с помощью электронно-вычислительной машины.

Задачи динамики решаются просто, если все силы, действующие на тело при его движении, остаются постоянными.

Однако вычисления значительно усложняются, если силы, действующие на тело, изменяются в процессе его движения. Ведь в таких случаях, чтобы найти новое положение тела, нужно знать скорость тела в течение всего времени его движения. Скорость, в свою очередь, зависит от ускорения. Но чтобы найти ускорение, нужно знать положение тела и его скорость. Выход из этого круга был найден самим Ньютоном. Он предложил приближенный численный метод, пригодный для решения любой задачи механики. С некоторыми уточнениями этот метод широко используется в современной науке и технике. В частности, при помощи него рассчитывается движение планет и их естественных и искусственных спутников, космических кораблей и т. д.

Чтобы *понять, как делаются подобные расчеты*, рассмотрим прямолинейное движение тела, на которое действует сила, зависящая от координаты этого тела. Такая сила действует, например, со стороны пружины на тело, закрепленное на ее конце (рис. 2.26).

Если начало отсчета совместить с концом недеформированной пружины, к которому прикреплено тело, то сила упругости, действующая на тело (точнее, ее проекция на ось X), линейно зависит от его координаты x, т. е.

$$F_x = -kx. \qquad (2.10.1)$$

О линейной зависимости силы упругости от деформации говорилось в § 2.4 и подробнее она будет рассмотрена в следующей главе. Для нас сейчас важно лишь то, что сила однозначно зависит от координаты тела.

На тело массой m действует сила упругости, проекция F_x которой определяется выражением (2.10.1). Из второго закона Ньютона

$$ma_x = F_x \qquad (2.10.2)$$

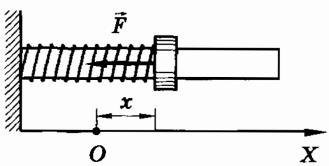


Рис. 2.26

следует, что ускорение тела равно

$$a_x = -\frac{k}{m}x. \qquad (2.10.3)$$

Пусть в момент времени t_0, принимаемый за начальный, тело имело координату x_0 и скорость v_{0x}. За малый промежуток времени $\Delta t = t_1 - t_0$ (например, 0,1 с, 0,01 с и т. д.) скорость тела изменяется очень мало. Ее приближенно можно считать постоянной и для вычисления координаты x_1 тела к концу промежутка времени Δt, т. е. к моменту времени t_1, можно воспользоваться уравнением координаты равномерного движения:

$$x_1 = x_0 + v_{0x}\Delta t^{1}. \qquad (2.10.4)$$

Согласно формуле (2.10.3) ускорение тела зависит от его координаты. Но при малом значении Δt координата тела будет мало отличаться от значения начальной координаты x_0. Поэтому в течение всего промежутка времени Δt ускорение можно приближенно считать постоянным и принять его равным начальному значению, т. е.

$$a_{0x} = -\frac{k}{m}x_0.$$

Тогда скорость v_{1x} тела к концу промежутка времени Δt можно вычислить по формуле

$$v_{1x} = v_{0x} + a_{0x}\Delta t. \qquad (2.10.5)$$

Итак, к концу промежутка времени Δt, т. е. в момент времени t_1, мы имеем новые значения x_1 и v_{1x} координаты тела и его скорости. Эти данные можно принять за начальные для следующего такого же промежутка времени $\Delta t = t_2 - t_1$ и точно та-

[1] Вообще говоря, для вычисления x_1 следовало бы применить формулу $x_1 = x_0 + v_{0x}\Delta t + \frac{a_x(\Delta t)^2}{2}$. Но при очень малых Δt, например при $\Delta t = 0{,}01$ с, $\Delta t^2 = 0{,}0001$ с^2, т. е. квадрат малого числа намного меньше самого числа. Поэтому последним слагаемым в формуле можно с большой степенью точности пренебречь.

ким же образом вычислить значения x_2 и υ_{2x}, которые соответствуют концу второго промежутка времени, т. е. моменту времени t_2. При этом для вычисления x_2 вместо x_0 и υ_{0x} следует взять x_1 и υ_{1x}, а для вычисления υ_{2x} вместо υ_{0x} и a_{0x} соответственно υ_{1x} и a_{1x}. В свою очередь, a_{1x} получается подстановкой в формулу (2.10.3) не x_0, а x_1, т. е.

$$a_{1x} = -\frac{k}{m}x_1.$$

Подобные расчеты можно продолжить для последующих промежутков времени Δt, пока не будет перекрыто все то время, в течение которого мы интересуемся движением. Конечно, такой расчет является приближенным. Мы ведь для каждого промежутка времени заменяем движение с переменным ускорением на движение с постоянным ускорением. Можно, однако, полагать, что при уменьшении Δt точность результатов возрастает. Доказательство этого составляет предмет высшей математики, основы которой заложил Ньютон. Следует иметь в виду, что на практике уменьшение промежутков времени Δt приводит к увеличению числа этих промежутков или, как говорят, к увеличению числа шагов, необходимого для перекрытия всего времени, в течение которого мы рассматриваем движение. В результате трудоемкость вычислений может оказаться очень значительной. Поэтому большое значение имеют приемы, позволяющие достигнуть достаточной точности за меньшее число шагов. Приведем простейший из этих приемов.

Скорость и ускорение тела изменяются непрерывно в течение каждого из промежутков времени Δt — в конце промежутка они не те, что были в начале. Поэтому в формулах (2.10.4) и (2.10.5) следовало бы использовать значения скорости и ускорения не в начале промежутка $\Delta t = t_1 - t_0$, а в его середине. Это можно сделать, вычислив предварительно значения координаты и скорости по этим же формулам, но вместо Δt взяв $\frac{\Delta t}{2}$. Значение ускорения в середине промежутка времени Δt можно найти, используя полученное значение координаты. В результате расчет одного шага производится по схеме, приведенной в таблице 3. Здесь значения, соответствующие середине промежутка времени Δt, обозначены индексом 1/2.

Таблица 3

Момент времени	Координата	Скорость	Ускорение
t_0	x_0	v_{0x}	$a_{0x} = -\frac{k}{m}x_0$
$t_{1/2} = t_0 + \frac{\Delta t}{2}$	$x_{1/2} = x_0 + v_{0x}\frac{\Delta t}{2}$	$v_{1/2x} = v_{0x} + a_{0x}\frac{\Delta t}{2}$	$a_{1/2x} = -\frac{k}{m}x_{1/2}$
$t_1 = t_0 + \Delta t$	$x_1 = x_0 + v_{1/2x}\Delta t$	$v_{1x} = v_{0x} + a_{1/2x}\Delta t$	$a_{1x} = -\frac{k}{m}x_1$

Все вычисления очень просты и единообразны, но в то же время трудоемки. До появления электронно-вычислительной техники для вычисления некоторых особенностей движения небесных тел зачастую тратились месяцы и годы. При помощи компьютера подобные вычисления проводятся за несколько минут. Результат нескольких шагов расчета, выданный на экране дисплея, показан на рисунке 2.27.

Этот метод легко может быть распространен на криволинейное движение. Например, если движение тела (материальной точки) происходит все время в одной плоскости и для описания этого движения используются координаты x и y, то к таблице 3

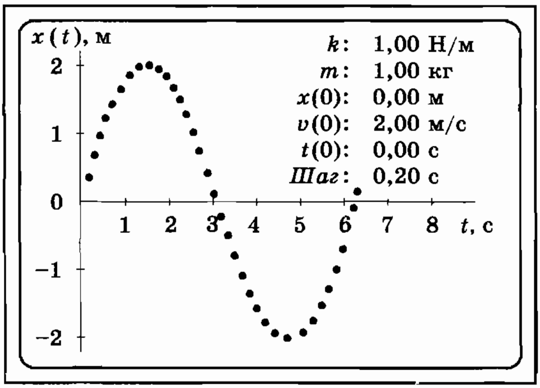


Рис. 2.27

добавляются еще столбцы для соответствующих значений y, v_y и a_y. В этом случае формулы, определяющие значения a_x и a_y, могут включать в себя x, y, v_x и v_y. Наконец, если нужно исследовать движение нескольких взаимодействующих тел, то для каждого из тел составляется подобная таблица.

Любую задачу динамики материальной точки можно приближенно решить с требуемой точностью. Проще всего это делается с помощью ЭВМ.

§ 2.11. СОСТОЯНИЕ СИСТЕМЫ ТЕЛ В МЕХАНИКЕ

В этом параграфе мы введем важнейшее для всей физики понятие «состояние». Речь пойдет о состоянии системы в механике.

Пусть нам известны массы группы тел, движение которых мы рассматриваем (система тел), и характер зависимости сил взаимодействия между телами от их координат и скоростей. Тогда, если нам даны координаты и скорости всех тел системы в некоторый момент времени, второй закон Ньютона позволяет определить радиус-вектор $\vec{r}(t)$ и скорость $\vec{v}(t)$ каждого тела в любой последующий момент времени. Для этого нужно решить систему уравнений движения, используя начальные данные. Поэтому можно утверждать, что:

координаты и скорости тел системы в данный момент времени полностью определяют ее механическое состояние.

Любая механическая величина, которая может представлять для нас интерес (импульс системы, ее энергия и т. д.), выражается, как мы увидим в дальнейшем, через координаты и скорости тел известной массы.

Значение и смысл понятия состояния в физике

Понятие состояния системы, возникшее первоначально в рамках механики Ньютона, имеет важнейшее значение для всей физики.

Все фундаментальные физические теории характеризуются общей структурой. Три элемента составляют основу любой фундаментальной теории: совокупность физических величин, с помощью которых описываются объекты данной физической теории (координаты, скорости, ускорения, силы и т. д. в механике Ньютона), состояние (координаты и скорости в механике) и уравнения движения, описывающие эволюцию состояния (второй закон Ньютона в механике).

Существенно, что состояние системы в данный начальный момент времени (т. е. начальные условия) не определяется четко формулируемыми законами природы. Выдающийся ученый Е. Вигнер сказал по этому поводу следующее: «Законы физики определяют поведение объектов лишь при некоторых вполне определенных условиях, но в других отношениях оставляют большой произвол. Те элементы, поведение которых не определяется законами природы, называются начальными условиями. Последние вместе с законами природы определяют поведение объекта в той степени, в какой это вообще возможно... Удивительным открытием эпохи Ньютона было как раз ясное отделение законов природы от начальных условий. Первые невообразимо точны, о вторых же мы, в сущности, ничего не знаем».

Начальные условия не подчинены определенным закономерностям, они не определяются однозначно воздействием окружающих тел, между ними (значениями координат и скоростей тел в фиксированный момент времени) не существует связи, т. е. они могут быть любыми.

Начальные условия, можно сказать, зависят от предшествующей эволюции системы, являющейся частью Вселенной. Для решения любой задачи они должны быть определены экспериментально или же заданы с помощью тех или иных соображений, учитывающих реальные обстоятельства постановки рассматриваемой задачи. Корни их значений лежат в прошлом, а не в настоящем.

Проводя четкое разделение между начальными условиями и законами природы, Ньютон ясно понимал, что можно вычислить орбиту планеты по измеренным начальным значениям ее координат и скоростей. Но нельзя установить, почему радиусы орбит планет (точнее, оси эллипсов) имеют определенные значения. Размеры радиусов определяются эволюцией Солнечной системы из газопылевого облака и зависят от начальных параметров этого облака. Кеплер же наряду с установлением кинематических законов движения планет (об этом см. § 2 гл. 3) пытался установить закон для радиусов их орбит. Успеха он здесь не достиг и не мог достичь.

Состояние системы в данный момент времени (начальные условия) не определяется законами природы. Эти законы позволяют лишь определять последующие состояния системы по известному начальному состоянию.

§ 2.12. ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Законы механики справедливы в инерциальных системах отсчета. Какие системы отсчета можно считать инерциальными?

Инерциальные и неинерциальные системы отсчета

Легко понять, что любая система отсчета, которая движется равномерно и прямолинейно относительно данной инерциальной системы отсчета, также является инерциальной. В самом деле, если тело относительно определенной инерциальной системы отсчета движется с постоянной скоростью $\vec{v}_2$, то и по отношению к системе отсчета, которая сама движется со скоростью $\vec{v} = \text{const}$, тело, согласно закону сложения скоростей, также будет двигаться с некоторой новой, но постоянной скоростью [см. формулу (1.30.12)]

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 - \vec{v} = \text{const}.$$

Например, машина, движущаяся по шоссе, параллельному железной дороге, со скоростью 100 км/ч вслед за равномерно движущимся со скоростью 60 км/ч поездом, имеет по отношению к поезду постоянную скорость 40 км/ч.

Напротив, любая система отсчета, движущаяся с ускорением относительно любой инерциальной системы отсчета, является неинерциальной. Действительно, если $\vec{v}_2 = \text{const}$, а скорость $\vec{v}$ изменяется, то $\vec{v}_1$ также будет меняться с течением времени. Если в приведенном выше примере скорость поезда увеличивается, то скорость машины по отношению к поезду не будет постоянной.

Если систему отсчета, связанную с Землей, можно рассматривать как инерциальную, то и системы отсчета, связанные с поездом, движущимся с постоянной скоростью, или с кораблем, плывущим по прямой с неизменной скоростью, также будут инерциальными. Но как только поезд начнет увеличивать свою скорость, то связанная с ним система перестанет быть инерциальной. Закон инерции и второй закон Ньютона перестанут выполняться, если рассматривать движение по отношению к таким системам.

Геоцентрическая система отсчета инерциальна лишь приближенно

Геоцентрическая система не является строго инерциальной. Наиболее близка к инерциальной система отсчета, связанная с Солнцем и неподвижными звездами. Земля же движется по отношению к этой системе с ускорением. Во-первых, она вращается вокруг своей оси и, во-вторых, движется вокруг Солнца.

Ускорение, обусловленное обращением Земли вокруг Солнца, очень мало, так как велик период обращения (год). Значительно больше (примерно в шесть раз) ускорение, возникшее из-за вращения Земли вокруг оси с периодом $T = 24$ ч. Но и оно невелико. На поверхности Земли у экватора, где это ускорение наибольшее, оно равно

$$a = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{R}\right)^2 R = 3{,}5 \text{ см/с}^2,$$

т. е. составляет всего 0,35% от ускорения свободного падения $g = 980$ см/с^2. Именно поэтому систему отсчета, связанную с Землей, можно приближенно рассматривать как инерциальную[1].

Доказательство вращения Земли

Существуют явления, которые нельзя объяснить, если считать геоцентрическую систему отсчета инерциальной. К ним относится поворот относительно Земли плоскости колебаний маятника в знаменитом опыте Фуко, доказывающем вращение Земли.

Рассмотрим колебания маятника в гелиоцентрической инерциальной системе отсчета. Для большей наглядности и простоты будем считать, что опыт проводится на полюсе. Пусть в начальный момент времени маятнику сообщается некоторая скорость $\vec{v}_0$. Этим он выводится из положения равновесия. Действующие на маятник сила притяжения к Земле $\vec{F}_т$ и сила упругости подвеса маятника $\vec{T}$ лежат в той же вертикальной плоскости, что и скорость $\vec{v}_0$ (рис. 2.28). Согласно второму закону Ньютона ускорение маятника совпадает по направлению с равнодействующей силой $\vec{F}$ и поэтому лежит в той же плоскости. Следовательно, в указанной плоскости будет лежать и при-

---

[1] Подробнее этот вопрос будет обсужден в главе 4.

ращение скорости. А это значит, что с течением времени плоскость колебаний маятника в инерциальной системе отсчета должна оставаться неизменной. Так и происходит в гелиоцентрической системе. Однако система отсчета, связанная с Землей, не является инерциальной и относительно нее плоскость колебаний маятника поворачивается вследствие вращения Земли. Чтобы это обнаружить, необходимо подвес осуществить так, чтобы трение в нем было мало, а сам маятник сделать достаточно массивным. Иначе трение в подвесе заставит плоскость колебаний следовать за вращением Земли.

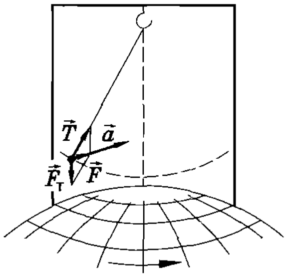


Рис. 2.28

На средних широтах колебание маятника будет выглядеть несколько сложнее, но суть явления не изменится. Впервые такой опыт был проведен Ж. Фуко в 1850 г. в Париже. Смещение плоскости колебаний маятника относительно Земли становится заметным уже через несколько минут.

Любая система отсчета, движущаяся относительно инерциальной системы с постоянной скоростью, также является инерциальной.

§ 2.13. ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ В МЕХАНИКЕ

Как меняются законы механики при рассмотрении движения в различных инерциальных системах? Ответ прост: они не меняются никак. Существует принцип относительности.

Равномерное прямолинейное движение системы тел не влияет на механические процессы, происходящие внутри нее

Галилей первым обратил внимание на то, что равномерное прямолинейное движение по отношению к Земле не сказывается на течении всех механических процессов.

Допустим, вы находитесь в каюте корабля или в вагоне поезда, движущегося совершенно плавно, без толчков. Вы можете спокойно играть в бадминтон или пинг-понг, если хватит мес-

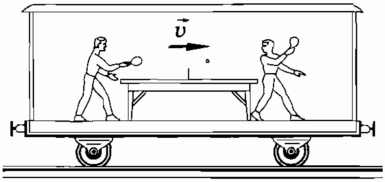


Рис. 2.29

та, точно так же, как и на Земле (рис. 2.29). Волан или мяч будут по отношению к стенкам и полу перемещаться точно так же, как и по отношению к Земле при игре в обычных условиях. Если не смотреть в окно, то с уверенностью нельзя сказать, что же происходит с поездом: движется он или стоит.

Если в движущемся с постоянной скоростью вагоне изучать падение тел, колебания маятника и другие явления, то результаты будут точно такими же, как и при исследовании этих явлений на Земле. Когда современный реактивный самолет летит со скоростью около 1000 км/ч, в его салоне не происходит ничего, что позволило бы ощутить эту огромную скорость. Вы можете есть, спать, играть в шахматы, чувствуя себя как дома на Земле.

Лишь при резком торможении поезда нужно прилагать дополнительные усилия, чтобы устоять на ногах. При большой болтанке самолета или качке парохода на большой волне об игре с мячом не может быть и речи. Все предметы приходится закреплять, для того чтобы они остались на своих местах.

Принцип относительности

На основании подобных наблюдений можно высказать один из самых фундаментальных законов природы — принцип относительности.

Все механические процессы протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета.

Это утверждение известно как принцип относительности в механике. Его еще называют принципом относительности Галилея.

Другая формулировка принципа относительности

Если все механические явления протекают одинаково в различных инерциальных системах, то уравнения движения, описывающие эти явления, не должны меняться при переходе от одной инерциальной системы к другой. Так и есть на самом деле. Ускорения одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.

Силы зависят от расстояний между телами и их относительных скоростей. Так как расстояния и относительные скорости, согласно преобразованиям Галилея (1.30.4), не меняются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, то не меняются и силы. Независимость массы тела от выбора системы отсчета — важнейший опытный факт механики Ньютона.

Следовательно, второй закон Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F}(r, v_{\text{от}})$$

не будет меняться при переходе от одной инерциальной системы к другой. Не будет меняться и третий закон Ньютона, так как силы не изменяются.

Утверждение о независимости законов механики от выбора инерциальной системы отсчета является другой формулировкой принципа относительности в механике. Обе формулировки равноценны.

Движение тел в различных инерциальных системах отсчета

Не следует думать, что выполнение принципа относительности означает полную тождественность движения одного и того же тела относительно различных инерциальных систем отсчета. Одинаковы лишь законы движения. Характер же движения тела определяется не только законами движения, но и начальными скоростями и начальными координатами. А начальные скорости и начальные координаты данного тела относительно разных систем отсчета различны. Так, камень будет падать отвесно, если его начальная скорость равна нулю по отношению к Земле. В равномерно движущемся поезде камень также будет падать отвесно по отношению к стенкам вагона, если начальная скорость камня по отношению к поезду равна нулю. Но с точки зрения наблюдателя на Земле камень, падающий отвесно в поезде, будет двигаться по параболе (рис. 2.30).

Дело в том, что начальная скорость камня по отношению к системе отсчета, связанной с Землей, отлична от нуля и равна скорости поезда.

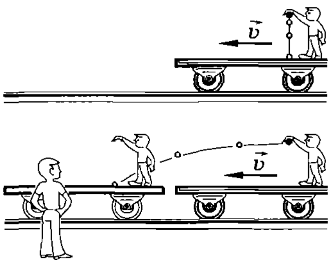


Рис. 2.30

Специальная теория относительности

В 1905 г. А. Эйнштейн распространил принцип относительности на электромагнитные и любые другие процессы. Благодаря этому принцип относительности стал общим законом природы. Не только механические, но и все другие явления протекают совершенно одинаково во всех инерциальных системах отсчета.

О теории Эйнштейна, называемой специальной теорией относительности, будет рассказано в дальнейшем.

Открытие принципа относительности — одно из величайших достижений человеческого разума. Оно оказалось возможным лишь после того, как люди поняли, что ни Земля, ни Солнце не являются центром Вселенной.

§ 2.14. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

В этом параграфе мы познакомимся с задачами на применение второго закона Ньютона, для решения которых не нужно знать зависимость сил от расстояний между телами (или частями одного тела) и от их относительных скоростей[1].

Силы, действующие на тела, считаем постоянными (кроме случаев, о которых идет речь в отдельных качественных задачах).

1. При решении задач нужно прежде всего выяснить, какие силы действуют на тело, движением которого мы интересуемся. Все известные силы надо изобразить на рисунке. При этом нужно отчетливо представлять себе, со стороны каких тел действуют рассматриваемые силы.

Не следует забывать, что действие одного тела на другое является взаимным. Силы взаимодействия подчиняются третьему закону Ньютона.

Может оказаться, что направление силы, которую требуется определить, не известно. В процессе решения задачи мы найдем проекции этой силы на координатные оси и по проекциям определим модуль силы и ее направление. Затем сила может быть изображена на рисунке.

Если в задаче говорится о системе нескольких тел, то изображаются силы, действующие на каждое из тел.

---

[1] Силу тяжести, действующую на тела у поверхности Земли, будем считать известной: $\vec{F}_т = m\vec{g}$. Эта формула должна быть вам знакома.

2. Нужно выбрать систему отсчета, относительно которой рассматривается движение тел. Координатные оси целесообразно располагать так, чтобы проекции сил на эти оси определялись наиболее просто. В случае прямолинейного движения удобно одну из осей направить вдоль этой прямой, а другую перпендикулярно ей.

3. Для каждого тела системы записывается второй закон Ньютона в векторной форме:

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots . \qquad (2.14.1)$$

После этого второй закон переписывается для проекций ускорений и сил на оси выбранной системы координат:

$$\begin{aligned} ma_x &= F_{1x} + F_{2x} + \dots , \\ ma_y &= F_{1y} + F_{2y} + \dots . \end{aligned} \qquad (2.14.2)$$

На том или ином этапе решения задачи вместо проекций векторов, направления которых известны, подставляются модули этих проекций с соответствующими знаками перед ними. Эту подстановку можно делать как в исходных уравнениях для проекций (2.14.2), так и в конечной формуле, определяющей ответ задачи.

После того как будет приобретен опыт в решении задач, для экономии времени и бумаги можно сразу записывать уравнения движения для проекций и подставлять в них значения модулей проекций, если знаки проекций известны.

4. Для решения задач о движении системы тел, соединенных тем или иным способом друг с другом, одних уравнений движения недостаточно. Нужно записать еще так называемые кинематические условия. Эти условия выражают соотношения между ускорениями тел системы, обусловленными связями между ними.

В частности, тела, связанные нерастяжимой нитью, имеют вдоль этой нити одинаковые по модулю ускорения: $a_1 = a_2$. При этом нить может быть перекинута через неподвижные блоки.

При наличии подвижного блока (рис. 2.31) ускорение тела A в два раза больше ускорения тела B, так как за одно и то же время тело A пройдет вдвое больший путь, чем тело B.

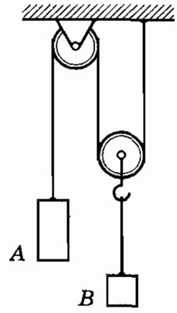


Рис. 2.31

5. Массой нитей, связывающих тела, во всех предлагаемых задачах пренебрегают. Лишь в этом случае натяжение нити одинаково во всех сечениях и одинаковы по модулю силы, дейст-

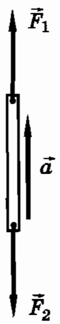


Рис. 2.32

вующие на нить со стороны прикрепленных к ней тел (рис. 2.32).

Действительно, пусть на нить действуют силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Согласно второму закону Ньютона $m_н\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Так как масса нити считается равной нулю ($m_н = 0$), $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ и $F_1 = F_2$.

По третьему закону Ньютона одинаковы по модулю и силы, которыми нить действует на прикрепленные к ней тела.

Массой всех блоков, встречающихся в условиях задач, также будем пренебрегать. В этом случае натяжение перекинутой через блок нити можно считать одинаковым по обе стороны блока. В противном случае натяжение нити по обе стороны блока будет различным. За счет различия в натяжении угловая скорость блока, обладающего массой, будет изменяться.

6. Если в задаче требуется найти не только силы или ускорения, но также координаты (или пройденные пути) тел и их скорости, то кроме уравнений движения нужно использовать кинематические формулы координат и скоростей.

7. Решение задачи следует сначала получить в общем виде и лишь затем подставить числовые значения в одной определенной системе единиц.

Получив ответ, надо проверить, все ли члены в решении имеют правильные наименования единиц. Такая проверка поможет обнаружить возможную ошибку в расчетах.

Полезно проследить, как будут изменяться найденные величины в зависимости от величин, заданных в условии задачи. Если, к примеру, окажется, что при некоторых значениях заданных в условии величин искомая величина обращается в бесконечность, то это указывает обычно на ошибку в решении или на неприменимость использованной физической модели.

8. Решение задач на динамику движения тела (материальной точки) по окружности принципиально не отличается от решения задач на прямолинейное движение.

Задача 1

При каких условиях тело (материальная точка) движется с постоянным ускорением? движется прямолинейно?

Решение. Ответ на первый вопрос сразу же следует из второго закона Ньютона:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

(под $\vec{F}$ будем понимать векторную сумму всех сил, действующих на тело). Так как масса тела постоянна, то $\vec{a}$ не будет изменяться ни по модулю, ни по направлению, если сила $\vec{F}$ будет постоянной.

Для прямолинейного движения тела необходимо и достаточно, чтобы вектор силы, действующей на тело, был расположен на одной прямой с вектором начальной скорости.

Действительно, в этом случае приращение скорости за малый интервал времени Δt, равное

$$\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a}\Delta t = \frac{\vec{F}}{m}\Delta t,$$

будет направлено вдоль действия силы. Вдоль этой линии будет направлена и скорость $\vec{v}$. В следующий промежуток времени произойдет тот же процесс. В результате в любой момент времени вектор $\vec{v}$ скорости тела окажется расположенным на одной прямой с вектором силы.

Задача 2

Груз массой $m = 20$ кг поднимают вверх с помощью веревки так, что в течение первого промежутка времени $\Delta t_1 = 2$ с его скорость меняется от $v_0 = 2$ м/с до $v_1 = 6$ м/с. В последующий промежуток времени $\Delta t_2 = 1$ с скорость уменьшается до значения $v_2 = 2$ м/с. Найдите модули сил, с которыми веревка действовала на груз в промежутки времени Δt_1 и Δt_2, считая эти силы постоянными.

Решение. В течение первого промежутка времени на тело действуют две силы: сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$, направленная вниз, и сила натяжения веревки $\vec{T}_1$, направленная вверх (рис. 2.33). Координатную ось Y направим вертикально вверх.

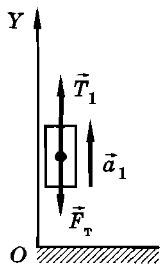


Рис. 2.33

Согласно второму закону Ньютона

$$m\vec{a}_1 = \vec{T}_1 + \vec{F}_т.$$

В проекциях на ось Y это уравнение запишется так:

$$ma_{1y} = T_{1y} + F_{тy}.$$

При выбранном направлении оси Y

$$T_{1y} = T_1,\ F_{тy} = -mg.$$

Отсюда

$$T_1 = m(g + a_{1y}). \qquad (2.14.3)$$

Для нахождения силы надо определить проекцию a_{1y} ускорения с помощью кинематической формулы скорости при движении с постоянным ускорением:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\Delta t.$$

В проекциях на ось Y будем иметь

$$v_{1y} = v_{0y} + a_{1y}\Delta t_1.$$

Учитывая, что $v_1y = v_1$ и $v_{0y} = v_0$, получим

$$a_{1y} = \frac{v_1 - v_0}{\Delta t_1} = 2 \text{ м/с}^2. \qquad (2.14.4)$$

Проекция $a_{1y} > 0$; это означает, что ускорение тела $\vec{a}_1$ направлено в положительном направлении оси Y, в данном случае вверх.

Подставляя в уравнение (2.14.3) найденное значение a_{1y}, определим модуль силы $\vec{T}_1$:

$$T_1 = m\left(g + \frac{v_1 - v_0}{\Delta t_1}\right) = 236 \text{ Н}.$$

При решении второй части задачи учтем, что формулы (2.14.3) и (2.14.4) остаются справедливыми. Нужно только индекс «1» заменить на индекс «2» и вместо начальной скорости v_0 взять скорость v_1. Тогда

$$a_{2y} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t_2}.$$

Проекция $a_{2y} = -4$ м/с^2; это означает, что ускорение тела $\vec{a}_2$ направлено против положительного направления оси Y, т. е. вниз. Искомая сила

$$T_2 = m\left(g + \frac{v_2 - v_1}{\Delta t_2}\right) = 116 \text{ Н}.$$

Задача 3

На невесомом стержне равномерно вращается в вертикальной плоскости груз массой $m = 0{,}9$ кг. Модуль скорости груза $v = 3$ м/с, длина стержня $l = 1$ м. Найдите, с какой по модулю силой и в каком направлении стержень действует на груз в тот момент, когда стержень занимает горизонтальное положение.

Решение. На груз действуют две силы: сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$, направленная вниз, и сила реакции $\vec{F}$ со стороны стержня (рис. 2.34, *а*). Так как направление силы $\vec{F}$ нам не известно, то ее на рисунке не изображаем. При равномерном движении по окружности груз имеет лишь нормальное ускорение $\vec{a}_n$, направленное к оси вращения стержня. Оси координат X и Y выберем так, как показано на рисунке 2.34, *а*.

Так как нам не известны ни модуль, ни направление силы $\vec{F}$, то необходимо найти ее проекции на оси координат.

Согласно второму закону Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{т}}.$$

В проекциях на оси координат получим

$$ma_x = F_x + F_{\text{т}x},\ ma_y = F_y + F_{\text{т}y}.$$

В данном случае $F_{\text{т}y} = -mg$, $a_y = 0$, $F_{\text{т}x} = 0$ и $a_x = a_n = \dfrac{v^2}{l}$.

Теперь система уравнений для проекций примет следующий вид:

$$F_x = \frac{mv^2}{l} = 8{,}1\ \text{Н},$$
$$F_y = mg = 8{,}82\ \text{Н}.$$

Найдем модуль силы $\vec{F}$:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \approx 12\ \text{Н}.$$

Направление силы $\vec{F}$ определяется углом, который она образует, например, с осью X:

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} = 0{,}676,\ \alpha = 47{,}5°.$$

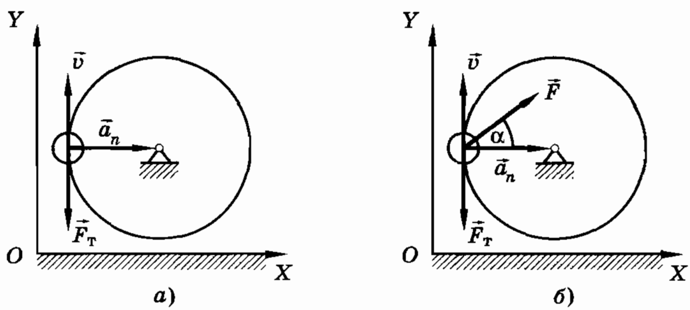


Рис. 2.34

Итак, стержень действует на груз с силой, модуль которой равен 12 Н. Направлена сила под углом 47,5° к стержню внутрь окружности, по которой движется груз (рис. 2.34, *б*).

Задача 4

На гладкой горизонтальной поверхности расположены три тела массами m_1, m_2 и m_3, связанные нерастяжимыми нитями друг с другом (рис. 2.35, *а*). К телу массой m_1 прикреплена перекинутая через блок нить, на конце которой находится груз массой m_4. Найдите модули ускорений тел системы и сил натяжения $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$, $\vec{T}_3$ всех нитей. Массами нитей и блока пренебречь.

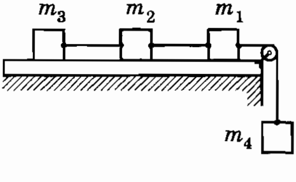
Решение. Силы, действующие на тела, изображены на рисунке 2.35, *б*. При этом силы, действующие по вертикали на тела массами m_1, m_2 и m_3, взаимно уравновешиваются и их рассмотрение не требуется для решения задачи.

Ось X направим горизонтально слева направо, а ось Y — вертикально вверх.

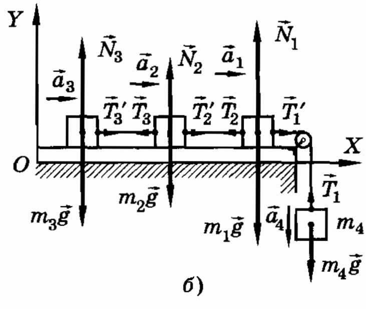
Уравнения движения для проекций ускорений и сил на оси X и Y для всех четырех тел будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} m_1a_{1x} &= T'_{1x} + T_{2x}, \\ m_2a_{2x} &= T'_{2x} + T_{3x}, \\ m_3a_{3x} &= T'_{3x}, \\ m_4a_{4y} &= m_4g_y + T_{1y}. \end{aligned} \qquad (2.14.5)$$

Вследствие нерастяжимости нитей модули ускорений равны: $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a$. Так как массами нитей и блоков пре-



а)



б)

Рис. 2.35

небрегаем, то с учетом положительных направлений осей X и Y имеем

$$\begin{aligned}
&T'_{1x} = T_1, T_{1y} = T_1,\\
&T'_{2x} = T_2, T_{2x} = -T_2,\\
&T'_{3x} = T_3, T_{3x} = -T_3,\\
&m_4 g_y = -m_4 g, a_{1x} = a,\\
&a_{2x} = a, a_{3x} = a, a_{4y} = -a.
\end{aligned} \qquad (2.14.6)$$

Уравнения для модулей ускорений и сил с учетом соотношений (2.14.5) и (2.14.6) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
&m_1 a = T_1 - T_2,\\
&m_2 a = T_2 - T_3,\\
&m_3 a = T_3,\\
&-m_4 a = -m_4 g + T_1.
\end{aligned} \qquad (2.14.7)$$

Складывая три первых уравнения и вычитая из полученной суммы четвертое уравнение, получим

$$(m_1 + m_2 + m_3 + m_4)a = m_4 g,$$

откуда

$$a = \frac{m_4 g}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}. \qquad (2.14.8)$$

Подставляя найденное значение a поочередно во все уравнения движения системы (2.14.7), начиная с последнего, получим

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} m_4 g,\\
T_2 &= \frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} m_4 g,\\
T_3 &= \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} m_4 g.
\end{aligned} \qquad (2.14.9)$$

Обратите внимание на то, что сила натяжения T_1 первой нити не равна силе тяжести $m_4 g$, как это было бы для покоящегося тела, а меньше в отношение

$$\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$

Как и следовало ожидать, $T_1 > T_2 > T_3$, так как нити сообщают одинаковые ускорения телам разной массы.

Задача 5

Найдите силы натяжения T_1 и T_2 нитей *abcd* и *ce* в устройстве с подвижным блоком, изображенном на рисунке 2.36, *а*. Массы тел соответственно равны $m_1 = 3$ кг и $m_2 = 2$ кг.

Решение. Так как массой нитей и блоков можно пренебречь, то натяжение нитей одинаково во всех сечениях. Нить *abcd*, огибающая блоки, будет действовать на тело массой m_1 и на левую и правую стороны подвижного блока с одинаковой силой $\vec{T}_1$ (рис. 2.36, *б*). Нить *ce*, соединяющая тело массой m_2 с подвижным блоком, действует на них с одинаковыми по модулю силами: $T_2 = T_2'$.

Координатную ось Y направим вертикально вверх. Запишем второй закон Ньютона сразу для проекций на ось Y. Учитывая, что $T_{1y} = T_1$, $T_{2y} = T_2$, $T'_{2y} = -T_2$, $F_{1y} = -m_1 g$, $F_{2y} = -m_2 g$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} m_1 a_{1y} = T_1 - m_1 g, \\ m_2 a_{2y} = T_2 - m_2 g, \\ 2T_1 - T_2 = 0. \end{cases} \qquad (2.14.10)$$

Последнее уравнение написано для подвижного блока с учетом того, что его масса равна нулю.

Система трех уравнений содержит четыре неизвестных: T_1, T_2, a_{1y} и a_{2y}. Необходимо добавить кинематическое условие, связывающее проекции ускорений a_{1y} и a_{2y}. При наличии подвижного блока $a_1 = 2a_2$. Так как ускорения $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ направлены в противоположные стороны, то $a_{1y} = -2a_{2y}$.

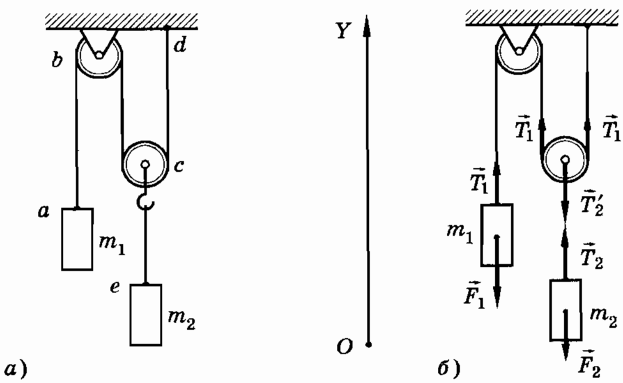


Рис. 2.36

Исключая силу натяжения T_2 из системы уравнений (2.14.10) и используя кинематическое условие связи ускорений, получим

$$\begin{cases} -2m_1a_{2y} = T_1 - m_1g, \\ m_2a_{2y} = 2T_1 - m_2g. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, найдем

$$a_{2y} = \frac{g(2m_1 - m_2)}{4m_1 + m_2} = 2{,}8\ \text{м/с}^2,$$

$$T_1 = \frac{3m_1m_2g}{4m_1 + m_2} = 12{,}6\ \text{Н}.$$

Учитывая, что $T_2 = 2T_1$, получим $T_2 = 25{,}2$ Н. Так как $a_{2y} > 0$, то ускорение $\vec{a}_2$ направлено вверх.

Проекция ускорения первого тела $a_{1y} = -2a_{2y} \approx -6$ м/с^2. Модуль ускорения $a_1 \approx 6$ м/с^2. Знак «минус» у проекции ускорения $\vec{a}_1$ показывает, что ускорение первого тела направлено противоположно оси Y, т. е. вниз.

Упражнение 7

1. На шар действует приложенная к его центру сила, совпадающая по направлению со скоростью шара. Модуль силы изменяется с течением времени так, как показано на рисунке 2.37. Какое движение совершает шар и в какой момент времени его скорость максимальна?
2. Проекция F_x силы, действующей на тело, изменяется со временем так, как показано на рисунке 2.38. Сила направлена вдоль оси X. Начальная скорость и координата тела равны нулю. Начертите графики зависимости проекции скорости $v_x(t)$ и координаты $x(t)$ от времени.
3. При движении тела массой $m = 0{,}1$ кг его координата меняется в зависимости от времени следующим образом: $x = 15\ \text{м/с}^2 \cdot t^2 + 2\ \text{м/с} \cdot t$. Найдите силу, действующую на тело.

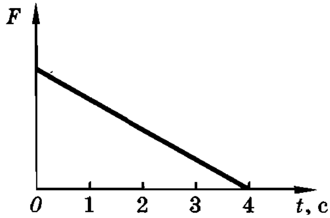


Рис. 2.37

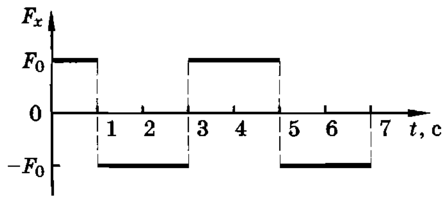


Рис. 2.38

4. Груз, подвешенный на нити длиной L, равномерно движется по окружности в горизонтальной плоскости (конический маятник). Нить описывает коническую поверхность, составляя с вертикалью угол α. Найдите период T обращения груза. Чему должна быть равна максимальная сила натяжения нити F, чтобы радиус окружности, по которой движется груз, мог достигнуть значения $\frac{2L}{\sqrt{5}}$?

5. Во время автомобильной катастрофы машина, двигавшаяся со скоростью $v = 54$ км/ч, налетела на бетонную стену. При этом передняя часть машины смялась так, что ее длина уменьшилась на $l_1 = 0{,}5$ м. Какая постоянная сила должна действовать на пассажира со стороны ремня безопасности, чтобы он не разбил головой ветровое стекло? Расстояние от головы пассажира до ветрового стекла $l_2 = 0{,}5$ м. Масса пассажира $m = 60$ кг.

6. К концу невесомого стержня длиной 1 м прикреплен небольшой шарик массой 0,1 кг; другой конец стержня закреплен на горизонтальной оси. Стержень равномерно вращается в вертикальной плоскости. С какой по модулю силой и в каком направлении шарик действует на стержень при прохождении наивысшей точки траектории, если скорость шарика 6 м/с (3,2 м/с; 1 м/с)?

7. Невесомый стержень изогнут под углом $\alpha = 30°$ (рис. 2.39). На конце участка стержня AB длиной 80 см закреплен маленький шарик массой 1 кг. Система вращается вокруг вертикального участка стержня так, что скорость шарика равна 2 м/с. С какой по модулю силой и в каком направлении стержень действует на шарик?

8. Найдите модули ускорения грузов и сил натяжения нитей для системы грузов, изображенной на рисунке 2.40. Массой нитей и блока, а также трением в оси блока пренебречь. Массы грузов соответственно равны 1, 2 и 3 кг.

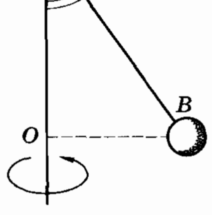


Рис. 2.39

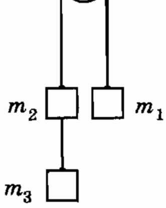


Рис. 2.40

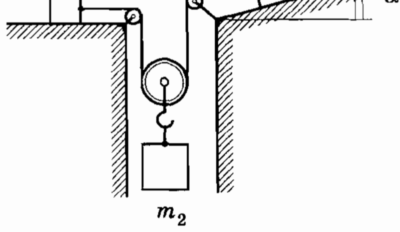


Рис. 2.41

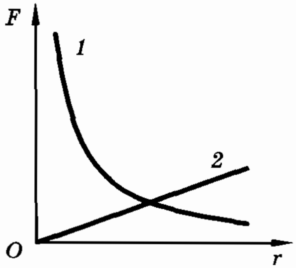


Рис. 2.42

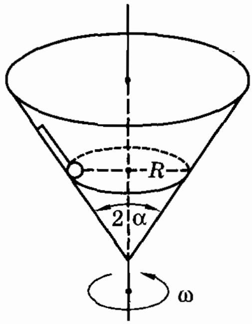


Рис. 2.43

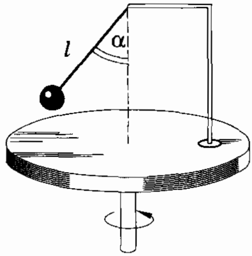


Рис. 2.44

9. На рисунке 2.41 изображена система движущихся тел, имеющих массы $m_1 = m$, $m_2 = 4m$, $m_3 = m$. Наклонная плоскость составляет с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Трение отсутствует. Определите силы натяжения нитей.

10. На рисунке 2.42 показаны графики *1*, *2* зависимости модуля силы, удерживающей тело на окружности, от ее радиуса. В одном случае — это гипербола, а в другом — прямая. Как объяснить это кажущееся противоречие?

11. Конус с углом раствора 2α вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω (рис. 2.43). В конусе находится шарик массой m, прикрепленный к внутренней поверхности конуса при помощи нити. Радиус окружности, по которой обращается шарик, равен R. Найдите силу натяжения нити T и силу давления шарика P на поверхность конуса. Трение не учитывать.

12. Как определить направление вращения ротора двигателя кофемолки, если ее корпус непрозрачен?

13. На оси центробежной машины закреплена нить длиной $l = 12{,}5$ см, на конце которой находится маленький шарик (рис. 2.44). Найдите угол α между нитью и вертикалью, если машина вращается с частотой $\nu_1 = 1$ Гц ($\nu_2 = 2$ Гц).

Глава 3

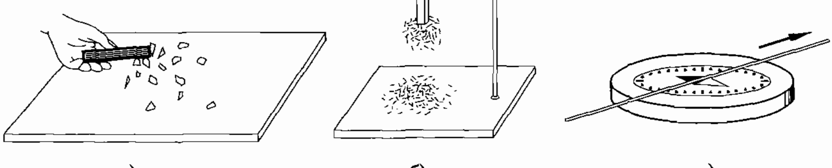
СИЛЫ В МЕХАНИКЕ

Во второй главе мы ввели понятие силы как количественной меры действия одного тела на другое. В этой главе мы рассмотрим, какие силы встречаются в механике, чем определяются их значения.

§ 3.1. СИЛЫ В ПРИРОДЕ

Выясним, много ли видов сил существует в природе.

На первый взгляд кажется, что мы взялись за непосильную и неразрешимую задачу: тел на Земле и вне ее бесконечное множество. Они взаимодействуют по-разному. Так, например, камень падает на Землю; электровоз тянет поезд; нога футболиста ударяет по мячу; потертая о мех эбонитовая палочка притягивает легкие бумажки (рис. 3.1, *а*); магнит притягивает желез-



а) *б*) *в*)

Рис. 3.1

ные опилки (рис. 3.1, *б*); проводник с током поворачивает стрелку компаса (рис. 3.1, *в*); взаимодействуют Луна и Земля, а вместе они взаимодействуют с Солнцем; взаимодействуют звезды и звездные системы и т. д. и т. п. Подобным примерам нет конца. Похоже, что в природе существует бесконечное множество взаимодействий (сил)! Оказывается, нет!

Четыре типа сил

В безграничных просторах Вселенной, на нашей планете, в любом веществе, в живых организмах, в атомах, в атомных ядрах и в мире элементарных частиц мы встречаемся с проявлением всего лишь четырех типов сил: гравитационных, электромагнитных, сильных (ядерных) и слабых.

Гравитационные силы, или силы всемирного тяготения, действуют между всеми телами — все тела притягиваются друг к другу. Но это притяжение существенно лишь тогда, когда хотя бы одно из взаимодействующих тел так же велико, как Земля или Луна. Иначе эти силы столь малы, что ими можно пренебречь.

Электромагнитные силы действуют между частицами, имеющими электрические заряды. Сфера их действия особенно обширна и разнообразна. В атомах, молекулах, твердых, жидких и газообразных телах, живых организмах именно электромагнитные силы являются главными. Велика их роль в атомных ядрах.

Область действия ядерных сил очень ограничена. Они сказываются заметным образом только внутри атомных ядер (т. е. на расстояниях порядка 10^{-12} см). Уже на расстояниях между частицами порядка 10^{-11} см (в тысячу раз меньших размеров атома — 10^{-8} см) они не проявляются совсем.

Слабые взаимодействия проявляются на еще меньших расстояниях. Они вызывают превращения элементарных частиц друг в друга.

Ядерные силы самые мощные в природе. Если интенсивность ядерных сил принять за единицу, то интенсивность электромагнитных сил составит 10^{-2}, гравитационных — 10^{-40}, слабых взаимодействий — 10^{-16}.

Надо сказать, что лишь гравитационные и электромагнитные взаимодействия можно рассматривать как силы в смысле механики Ньютона. Сильные (ядерные) и слабые взаимодействия проявляются на таких малых расстояниях, когда законы механики Ньютона, а с ними вместе и понятие механической силы теряют смысл. Если и в этих случаях употребляют термин «сила», то лишь как синоним слова «взаимодействие».

Силы в механике

В механике обычно имеют дело с силами тяготения, силами упругости и силами трения.

Мы не будем здесь рассматривать электромагнитную природу силы упругости и силы трения. С помощью опытов можно выяснить условия, при которых возникают эти силы, и выразить их количественно.

В природе существуют четыре типа сил. В механике изучаются гравитационные силы и две разновидности электромагнитных сил — силы упругости и силы трения.

§ 3.2. СИЛА ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

В этом параграфе мы расскажем об удивительной догадке Ньютона, приведшей к открытию закона всемирного тяготения.

Почему выпущенный из рук камень падает на Землю? Потому что его притягивает Земля, скажет каждый из вас. В самом деле, камень падает на Землю с ускорением свободного падения. Следовательно, на камень со стороны Земли действует сила, направленная к Земле. Согласно третьему закону Ньютона и камень действует на Землю с такой же по модулю силой, направленной к камню. Иными словами, между Землей и камнем действуют силы взаимного притяжения.

Догадка Ньютона

Ньютон был первым, кто сначала догадался, а потом и строго доказал, что причина, вызывающая падение камня на Землю, движение Луны вокруг Земли и планет вокруг Солнца, одна и та же. Это сила тяготения, действующая между любыми телами Вселенной. Вот ход его рассуждений, приведенных в главном труде Ньютона «Математические начала натуральной философии»: «Брошенный горизонтально камень отклонится под действием тяжести от прямолинейного пути и, описав кривую траекторию, упадет наконец на Землю. Если его бросить с большей скоростью, то он упадет дальше» (рис. 3.2). Продолжая эти рассуждения, Ньютон приходит к выводу, что если бы не сопротивление воздуха, то траектория камня, брошенного с высокой горы с определенной скоростью, могла бы стать такой, что он вообще никогда не достиг бы поверхности Земли, а двигался вокруг нее «подобно тому, как планеты описывают в небесном пространстве свои орбиты».

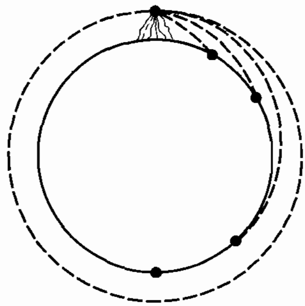


Рис. 3.2

Сейчас нам стало настолько привычным движение спутников вокруг Земли, что разъяснять мысль Ньютона подробнее нет необходимости.

Итак, по мнению Ньютона, движение Луны вокруг Земли или планет вокруг Солнца — это тоже свободное падение, но только падение, которое длится, не прекращаясь, миллиарды лет. Причиной такого «падения» (идет ли речь действительно о падении обычного камня на Землю или о движении планет по их орбитам) является с и л а в с е м и р н о г о т я г о т е н и я. От чего же эта сила зависит?

Зависимость силы тяготения от массы тел

В § 1.23 говорилось о свободном падении тел. Упоминались опыты Галилея, доказавшие, что Земля сообщает всем телам в данном месте одно и то же ускорение независимо от их массы. Это возможно лишь в том случае, если сила притяжения к Земле прямо пропорциональна массе тела. Именно в этом случае ускорение свободного падения, равное отношению силы земного притяжения к массе тела, является постоянной величиной.

Действительно, в этом случае увеличение массы m, например, вдвое приведет к увеличению модуля силы $\vec{F}$ тоже вдвое, а ускорение, которое равно отношению $\frac{\vec{F}}{m}$, останется неизменным.

Обобщая этот вывод для сил тяготения между любыми телами, заключаем, что сила всемирного тяготения прямо пропорциональна массе тела, на которое эта сила действует. Но во взаимном притяжении участвуют по меньшей мере два тела. На каждое из них, согласно третьему закону Ньютона, действуют одинаковые по модулю силы тяготения. Поэтому каждая из этих сил должна быть пропорциональна как массе одного тела, так и массе другого тела.

Поэтому *сила всемирного тяготения между двумя телами прямо пропорциональна произведению их масс:*

$$F \sim m_1 m_2. \qquad (3.2.1)$$

От чего еще зависит сила тяготения, действующая на данное тело со стороны другого тела?

Зависимость силы тяготения от расстояния между телами

Можно предположить, что сила тяготения должна зависеть от расстояния между телами. Чтобы проверить правильность этого предположения и найти зависимость силы тяготения от расстояния между телами, Ньютон обратился к движению спутника Земли — Луны. Ее движение было в те времена изучено гораздо точнее, чем движение планет.

Обращение Луны вокруг Земли происходит под действием силы тяготения между ними. Приближенно орбиту Луны можно считать окружностью. Следовательно, Земля сообщает Луне центростремительное ускорение. Оно вычисляется по формуле

$$a = \frac{4\pi^2}{T^2} R,$$

где R — радиус лунной орбиты, равный примерно 60 радиусам Земли, T = 27 сут 7 ч 43 мин = $2{,}4 \cdot 10^6$ с — период обращения Луны вокруг Земли. Учитывая, что радиус Земли $R_З = 6{,}4 \cdot 10^6$ м, получим, что центростремительное ускорение Луны равно:

$$a = \frac{4\pi^2 \cdot 60 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6 \text{ м}}{(2{,}4 \cdot 10^6 \text{ с})^2} \approx 0{,}0027 \text{ м/с}^2.$$

Найденное значение ускорения меньше ускорения свободного падения тел у поверхности Земли (9,8 м/с^2) приблизительно в $3600 = 60^2$ раз.

Таким образом, увеличение расстояния между телом и Землей в 60 раз привело к уменьшению ускорения, сообщаемого земным притяжением, а следовательно, и самой силы притяжения в 60^2 раз[1].

Отсюда вытекает важный вывод: *ускорение, которое сообщает телам сила притяжения к Земле, убывает обратно пропорционально квадрату расстояния до центра Земли:*

$$a = \frac{C_1}{R^2}, \qquad (3.2.2)$$

где C_1 — постоянный коэффициент, одинаковый для всех тел.

Законы Кеплера

Исследование движения планет показало, что это движение вызвано силой притяжения к Солнцу. Используя тщательные многолетние наблюдения датского астронома Тихо Браге, немецкий ученый Иоганн Кеплер в начале XVII в. установил кинематические законы движения планет — так называемые законы Кеплера.

Первый закон Кеплера

Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.

Эллипсом (рис. 3.3) называется плоская замкнутая кривая, сумма расстояний от любой точки которой до двух фиксированных точек, называемых фокусами, постоянна. Эта сумма расстояний равна длине большой оси AB эллипса, т. е.

$$F_1P + F_2P = 2b,$$

где F_1 и F_2 — фокусы эллипса, а $b = \frac{AB}{2}$ — его большая полуось; O — центр эллипса. Ближайшая к Солнцу точка орбиты называется перигелием, а самая далекая от него точка —

---

[1] Интересно, что, будучи студентом, Ньютон понял, что Луна движется под влиянием притяжения к Земле. Но в то время радиус Земли был известен неточно, и расчеты не привели к правильному результату $\left(a \sim \frac{1}{R^2}\right)$. Лишь спустя 16 лет появились новые, исправленные данные, и закон всемирного тяготения был опубликован.

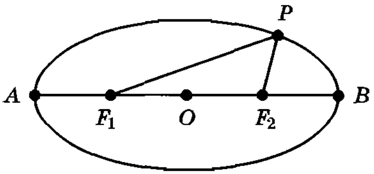


Рис. 3.3

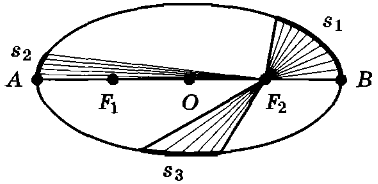


Рис. 3.4

а ф е л и е м. Если Солнце находится в фокусе F_1 (см. рис. 3.3), то точка A — перигелий, а точка B — афелий.

Второй закон Кеплера

Радиус-вектор планеты за одинаковые промежутки времени описывает равные площади. Так, если заштрихованные секторы (рис. 3.4) имеют одинаковые площади, то пути s_1, s_2, s_3 будут пройдены планетой за равные промежутки времени. Из рисунка видно, что $s_1 > s_2$. Следовательно, линейная скорость движения планеты в различных точках ее орбиты неодинакова. В перигелии скорость планеты наибольшая, в афелии — наименьшая.

Третий закон Кеплера

Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит. Обозначив большую полуось орбиты и период обращения одной из планет через b_1 и T_1, а другой — через b_2 и T_2, третий закон Кеплера можно записать так:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{b_1^3}{b_2^3}. \qquad (3.2.3)$$

Из этой формулы видно, что чем дальше планета от Солнца, тем больше ее период обращения вокруг Солнца.

На основании законов Кеплера можно сделать определенные выводы об ускорениях, сообщаемых планетам Солнцем. Мы для простоты будем считать орбиты не эллиптическими, а круговыми. Для планет Солнечной системы эта замена не является слишком грубым приближением.

Тогда сила притяжения со стороны Солнца в этом приближении должна быть направлена для всех планет к центру Солнца.

Если через T обозначить периоды обращения планет, а через R — радиусы их орбит, то, согласно третьему закону Кеплера, для двух планет можно записать

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}. \qquad (3.2.4)$$

Нормальное ускорение при движении по окружности $a = \omega^2 R$. Поэтому отношение ускорений планет

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{T_2^2 R_1}{T_1^2 R_2}. \qquad (3.2.5)$$

Используя уравнение (3.2.4), получим

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2}.$$

Так как третий закон Кеплера справедлив для всех планет, то ускорение каждой планеты обратно пропорционально квадрату расстояния ее до Солнца:

$$a = \frac{C_2}{R^2}. \qquad (3.2.6)$$

Постоянная C_2 одинакова для всех планет, но не совпадает с постоянной C_1 в формуле для ускорения, сообщаемого телам земным шаром.

Выражения (3.2.2) и (3.2.6) показывают, что сила тяготения в обоих случаях (притяжение к Земле и притяжение к Солнцу) сообщает всем телам ускорение, не зависящее от их массы и убывающее обратно пропорционально квадрату расстояния между ними:

$$F \sim a \sim \frac{1}{R^2}. \qquad (3.2.7)$$

Закон всемирного тяготения

Существование зависимостей (3.2.1) и (3.2.7) означает, что сила всемирного тяготения

$$F \sim \frac{m_1 m_2}{R^2}.$$

В 1667 г. Ньютон окончательно сформулировал закон всемирного тяготения:

$$\boxed{F = G\frac{m_1 m_2}{R^2}.} \qquad (3.2.8)$$

Сила взаимного притяжения двух тел прямо пропорциональна произведению масс этих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Коэффициент пропорциональности G называется гравитационной[1] постоянной.

Взаимодействие точечных и протяженных тел

Закон всемирного тяготения (3.2.8) справедлив только для таких тел, размеры которых пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием между ними. Иначе говоря, он справедлив только для материальных точек. При этом силы гравитационного взаимодействия направлены вдоль линии, соединяющей эти точки (рис. 3.5). Подобного рода силы называются центральными.

Для нахождения силы тяготения, действующей на данное тело со стороны другого, в случае, когда размерами тел пренебречь нельзя, поступают следующим образом. Оба тела мысленно разделяют на столь малые элементы, чтобы каждый из них можно было считать точечным. Складывая силы тяготения, действующие на каждый элемент данного тела со стороны всех элементов другого тела, получают силу, действующую на этот элемент (рис. 3.6). Проделав такую операцию для каждого элемента данного тела и сложив полученные силы, находят полную силу тяготения, действующую на это тело. Задача эта сложная.

Есть, однако, один практически важный случай, когда формула (3.2.8) применима к протяженным телам. Можно дока-

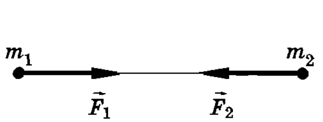


Рис. 3.5

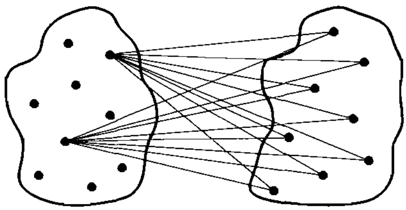


Рис. 3.6

[1] От латинского слова gravitas — тяжесть.

зать, что сферические тела, плотность которых зависит только от расстояний до их центров, при расстояниях между ними, бо́льших суммы их радиусов, притягиваются с силами, модули которых определяются формулой (3.2.8). В этом случае R — это расстояние между центрами шаров.

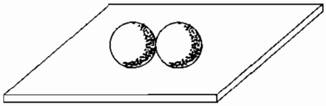


Рис. 3.7

И наконец, так как размеры падающих на Землю тел много меньше размеров Земли, то эти тела можно рассматривать как точечные. Тогда под R в формуле (3.2.8) следует понимать расстояние от данного тела до центра Земли.

Между всеми телами действуют силы взаимного притяжения, зависящие от самих тел (их масс) и от расстояния между ними.

? 1. Расстояние от Марса до Солнца на 52% больше расстояния от Земли до Солнца. Какова продолжительность года на Марсе?
2. Как изменится сила притяжения между шарами, если алюминиевые шары (рис. 3.7) заменить стальными шарами той же массы? того же объема?

§ 3.3. ГРАВИТАЦИОННАЯ ПОСТОЯННАЯ

Выясним физический смысл гравитационной постоянной. Чему она равна, как была измерена?

Физический смысл гравитационной постоянной

Из формулы (3.2.8) находим

$$G = \frac{FR^2}{m_1 m_2}. \qquad (3.3.1)$$

Отсюда следует, что если расстояние между телами численно равно единице ($R = 1$ м) и массы взаимодействующих тел тоже равны единице ($m_1 = m_2 = 1$ кг), то гравитационная постоянная численно равна модулю силы $\vec{F}$. Таким образом, *гравитационная постоянная численно равна модулю силы тяготения, действующей на тело массой* 1 кг *со стороны другого тела такой же массы при расстоянии между телами, равном* 1 м.

Из формулы (3.3.1) также видно, что в СИ гравитационная постоянная выражается в $\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$.

Опыт Кавендиша

Значение гравитационной постоянной G может быть найдено только опытным путем. Для этого, как видно из формулы (3.3.1), надо измерить модуль силы тяготения $\vec{F}$, действующей на тело массой m_1 со стороны тела массой m_2 при известном расстоянии R между телами.

Впервые гравитационная постоянная была измерена английским физиком Г. Кавендишем в 1798 г. с помощью прибора, называемого крутильными весами. Схематично крутильные весы показаны на рисунке 3.8. Кавендиш закрепил два маленьких свинцовых шара (диаметром 5 см и массой 775 г каждый) на противоположных концах двухметрового стержня. Стержень был подвешен на тонкой проволоке. Для этой проволоки предварительно определялись силы упругости, возникающие в ней при закручивании на различные углы. Два больших свинцовых шара (диаметром 20 см и массой 49,5 кг) можно было близко подводить к маленьким шарам. Силы притяжения со стороны больших шаров заставляли маленькие шары перемещаться к ним, при этом натянутая проволока немного закручивалась. Степень закручивания была мерой силы, действующей между шарами. Угол закручивания проволоки (или поворота стержня с малыми шарами) оказался столь малым, что его пришлось измерять с помощью оптической трубы. Результат, полученный Кавендишем, только на 1% отличается от значения гравитационной постоянной, принятого сегодня:

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}.$$

Таким образом, силы притяжения двух тел массой по 1 кг каждое, находящихся на расстоянии 1 м друг от друга, по модулям равны всего лишь $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н. Это очень малая сила. Только в том случае, когда взаимодействуют тела огромной массы (или по крайней мере масса одного из тел велика), сила тяготения становится большой. Например, Земля притягивает Луну с силой $F = 2 \cdot 10^{20}$ Н.

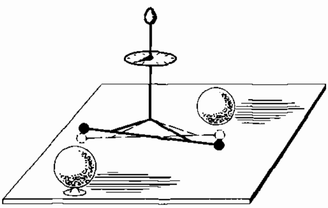


Рис. 3.8

Гравитационные силы — самые «слабые» из всех сил природы. Это связано с тем, что гравитационная постоянная мала. Но при больших массах космических тел силы всемирного тяготения становятся очень большими. Эти силы удерживают все планеты возле Солнца.

§ 3.4. ЗНАЧЕНИЕ ЗАКОНА ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

Закон всемирного тяготения лежит в основе небесной механики — науки о движении планет. С помощью этого закона с огромной точностью определяются положения небесных тел на небесном своде на многие десятки лет вперед и вычисляются их траектории. Закон всемирного тяготения применяется также в расчетах движения искусственных спутников Земли и межпланетных автоматических аппаратов.

Возмущения в движении планет

Планеты не движутся строго по законам Кеплера. Законы Кеплера точно соблюдались бы для движения данной планеты лишь в том случае, когда вокруг Солнца обращалась бы одна эта планета. Но в Солнечной системе планет много, все они притягиваются как Солнцем, так и друг другом. Поэтому возникают возмущения движения планет. В Солнечной системе возмущения невелики, потому что притяжение планеты Солнцем гораздо сильнее притяжения другими планетами.

При вычислении видимого положения планет приходится учитывать возмущения. При запуске искусственных небесных тел и при расчете их траекторий пользуются приближенной теорией движения небесных тел — теорией возмущений.

Открытие Нептуна

Одним из ярких примеров триумфа закона всемирного тяготения является открытие планеты Нептун. В 1781 г. английский астроном Вильям Гершель открыл планету Уран. Была вычислена ее орбита и составлена таблица положений этой планеты на много лет вперед. Однако проверка этой таблицы, проведенная в 1840 г., показала, что данные ее расходятся с действительностью.

Ученые предположили, что отклонение в движении Урана вызвано притяжением неизвестной планеты, находящейся от Солнца еще дальше, чем Уран. Зная отклонения от расчетной траектории (возмущения движения Урана), англичанин Адамс и француз Леверрье, пользуясь законом всемирного тяготения, вычислили положение этой планеты на небе.

Адамс раньше закончил вычисления, но наблюдатели, которым он сообщил свои результаты, не торопились с проверкой. Тем временем Леверрье, закончив вычисления, указал немецкому астроному Галле место, где надо искать неизвестную планету. В первый же вечер, 28 сентября 1846 г., Галле, направив телескоп на указанное место, обнаружил новую планету. Ее назвали Нептуном.

Таким же образом 14 марта 1930 г. была открыта планета Плутон. Оба открытия, как говорят, были сделаны «на кончике пера».

В § 3.2 мы говорили, что закон всемирного тяготения Ньютон открыл, используя законы движения планет — законы Кеплера. Правильность открытого Ньютоном закона всемирного тяготения подтверждается и тем, что с помощью этого закона и второго закона Ньютона можно вывести законы Кеплера. Мы не будем приводить этот вывод.

При помощи закона всемирного тяготения можно вычислить массу планет и их спутников; объяснить такие явления, как приливы и отливы воды в океанах, и многое другое.

Гравитационной «тени» нет

Силы всемирного тяготения — самые универсальные из всех сил природы. Они действуют между любыми телами, обладающими массой, а массу имеют все тела. Для сил тяготения не существует никаких преград. Они действуют сквозь любые тела. Экраны из особых веществ, непроницаемых для гравитации (вроде «кеворита» из романа Г. Уэллса «Первые люди на Луне»), могут существовать только в воображении авторов научно-фантастических книг.

Стремительное развитие механики началось после открытия закона всемирного тяготения. Стало ясно, что одни и те же законы действуют на Земле и в космическом пространстве.

§ 3.5. РАВЕНСТВО ИНЕРТНОЙ И ГРАВИТАЦИОННОЙ МАСС

Самым поразительным свойством гравитационных сил является то, что они в данной точке пространства сообщают всем телам, независимо от их массы, одно и то же ускорение.

Что бы вы сказали о футболисте, удар которого одинаково ускорил бы обыкновенный мяч и двухпудовую гирю? Каждый скажет, что это невозможно. А вот Земля является именно таким необыкновенным «футболистом», с той только разницей, что действие ее на тела не носит характера кратковременного удара, а продолжается непрерывно миллиарды лет.

Необыкновенное свойство гравитационных сил, как мы уже говорили (см. § 3.2), объясняется тем, что эти силы пропорциональны массам обоих взаимодействующих тел. Факт этот не может не вызвать удивления, если над ним хорошенько задуматься. Ведь масса, которая входит во второй закон Ньютона, определяет инертные свойства тела, т. е. его способность приобретать определенное ускорение под действием данной силы. Эту массу естественно назвать инертной массой m_i.

Казалось бы, какое отношение она может иметь к способности тел притягивать друг друга? Массу, определяющую способность тел притягиваться друг к другу, следовало бы назвать гравитационной массой m_g.

Из механики Ньютона совсем не следует, что инертная и гравитационная массы одинаковы, т. е. что

$$m_i = m_g. \tag{3.5.1}$$

Равенство (3.5.1) следует непосредственно из опыта. Оно означает, что можно говорить просто о массе тела как количественной мере и инертных, и гравитационных его свойств.

Опытный факт равенства инертной и гравитационной масс в рамках классической механики выглядит случайным. Лишь в общей теории относительности, построенной А. Эйнштейном, равенство гравитационной и инертной масс положено в основу новой теории тяготения, обобщающей простую теорию тяготения Ньютона. Но обсуждение этого вопроса выходит за рамки механики Ньютона.

Масса тела является количественной мерой его инертных и гравитационных свойств.

§ 3.6. СИЛА ТЯЖЕСТИ. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

Расскажем теперь более подробно о силе притяжения тел Землей и о том, как была «взвешена» сама Земля.

Сила тяжести

Частным, но крайне важным для нас видом силы всемирного тяготения является сила притяжения тел к Земле. Эту силу называют с и л о й т я ж е с т и. Согласно закону всемирного тяготения, она выражается формулой

$$F_т = G\frac{mM}{(R+h)^2}, \qquad (3.6.1)$$

где m — масса тела, M — масса Земли, R — радиус Земли, h — высота тела над поверхностью Земли. Сила тяжести направлена вертикально вниз, к центру Земли.

Сила тяжести сообщает телу ускорение, называемое ускорением свободного падения. В соответствии со вторым законом Ньютона

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_т}{m}. \qquad (3.6.2)$$

С учетом выражения (3.6.1) для модуля ускорения свободного падения будем иметь

$$g_h = G\frac{M}{(R+h)^2}. \qquad (3.6.3)$$

На поверхности Земли ($h = 0$) модуль ускорения свободного падения равен

$$g = G\frac{M}{R^2}, \qquad (3.6.4)$$

а сила тяжести равна

$$\vec{F}_т = m\vec{g}. \qquad (3.6.5)$$

Модуль ускорения свободного падения, входящего в формулы (3.6.4) и (3.6.5), равен приближенно 9,8 м/с^2.

Ускорение свободного падения

Из формулы (3.6.3) видно, что ускорение свободного падения не зависит от массы тела. Оно уменьшается при подъеме тела над поверхностью Земли: *ускорение свободного падения обратно пропорционально квадрату расстояния тела от центра Земли.*

Однако если высота h тела над поверхностью Земли не превышает 100 км, то при расчетах, допускающих погрешность $\approx 1{,}5\%$, этой высотой можно пренебречь по сравнению с радиусом Земли ($R = 6370$ км). Ускорение свободного падения на высотах до 100 км можно считать постоянным и равным 9,8 м/с^2.

И все же *у поверхности Земли ускорение свободного падения не везде одинаково.* Оно зависит от географической широты: больше на полюсах Земли, чем на экваторе. Дело в том, что земной шар несколько сплюснут у полюсов. Экваториальный радиус Земли больше полярного на 21 км.

Другой, более существенной причиной зависимости ускорения свободного падения от географической широты является вращение Земли. Второй закон Ньютона, с помощью которого получена формула (3.6.4), справедлив в инерциальной системе отсчета.

Такой системой является, например, гелиоцентрическая система. Систему же отсчета, связанную с Землей, строго говоря, нельзя считать инерциальной. Земля вращается вокруг своей оси и движется по замкнутой орбите вокруг Солнца.

Вращение Земли и сплюснутость ее у полюсов приводит к тому, что ускорение свободного падения относительно геоцентрической системы отсчета на разных широтах различно: на полюсах $g_{пол} \approx 9{,}83$ м/с^2, на экваторе $g_{экв} \approx 9{,}78$ м/с^2, на широте 45° $g = 9{,}81$ м/с^2. Впрочем, в наших расчетах мы будем считать ускорение свободного падения приближенно равным 9,8 м/с^2.

Из-за вращения Земли вокруг своей оси ускорение свободного падения во всех местах, кроме экватора и полюсов, не направлено точно к центру Земли.

Кроме того, ускорение свободного падения зависит от плотности пород, залегающих в недрах Земли. В районах, где залегают породы, плотность которых больше средней плотности Земли (например, железная руда), g больше. А там, где имеются залежи нефти, g меньше. Этим пользуются геологи при поиске полезных ископаемых.

Масса Земли

Без «земных» опытов по определению гравитационной постоянной G мы никакими астрономическими способами не смогли бы определить массу Земли и других планет.

Определив опытным путем ускорение свободного падения, можно, пользуясь выражением (3.6.4), вычислить массу Земли:

$$M = \frac{gR^2}{G}. \qquad (3.6.6)$$

Подставив в эту формулу $R \approx 6{,}4 \cdot 10^6$ м, $g \approx 9{,}8$ м/с^2 и $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2, получим

$$M \approx 6{,}0 \cdot 10^{24} \text{ кг}.$$

Центр тяжести[1]

Сила тяжести действует на все тела. Но к какой точке тела приложена эта сила, если тело нельзя считать материальной точкой?

Возьмем тело произвольной формы, например кусок фанеры. Проколем в нем несколько отверстий: в точках A, B, D (рис. 3.9, *а*). Подвесим этот кусок фанеры на спице, пропущенной через отверстие в точке A. На кусок фанеры действуют сила тяжести $\vec{F}_т$ и сила со стороны опоры (спицы) — сила реакции опоры $\vec{N}$. Под действием этих двух сил тело находится в равновесии (покоится). Поэтому, согласно второму закону Ньютона,

$$\vec{F}_т + \vec{N} = 0, \qquad (3.6.7)$$

так как ускорение тела равно нулю.

Из выражения (3.6.7) следует, что

$$\vec{F}_т = -\vec{N},$$

т. е. сила тяжести $\vec{F}_т$ и сила реакции опоры $\vec{N}$ направлены противоположно, и линии их действия лежат на одной прямой. Эта прямая вертикальна и проходит через точку A (прямая AK), так как сила реакции спицы $\vec{N}$ приложена к куску фанеры в точке подвеса, т. е. в точке A. Следовательно, точка приложения силы тяжести (начало вектора силы тяжести), действующей на кусок фанеры, лежит на прямой AK.

Теперь подвесим этот же кусок фанеры в точке B (рис. 3.9, *б*). Аналогичными рассуждениями мы придем к выводу, что точка приложения силы тяжести лежит на прямой BL. Но раз точка

---

[1] Более подробно о центре тяжести рассказывается в главе 8.

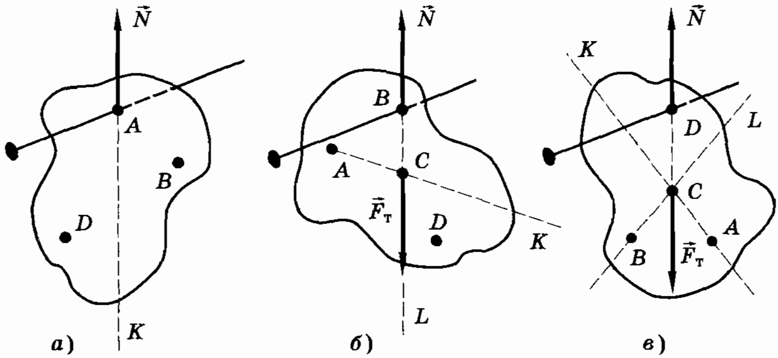


Рис. 3.9

приложения силы тяжести лежит и на прямой BL, и на прямой AK, то она должна совпасть с точкой C их пересечения. Подвесив кусок фанеры в точке D (рис. 3.9, *в*) и проведя через нее вертикаль, убедимся, что она тоже проходит через точку C. Таким образом, при любом положении тела в пространстве точкой приложения силы тяжести, действующей на тело, является одна и та же точка. Эта точка называется ц е н т р о м т я ж е с т и т е л а.

Центром тяжести тела называется точка приложения силы тяжести, действующей на тело, при любом его положении в пространстве.

Надо хорошо понимать, что сила тяжести действует на все частицы, из которых состоит тело. Но если положение центра тяжести известно, то мы можем «забыть» о том, что на все части тела действуют силы тяжести, и считать, что есть только одна сила, приложенная в центре тяжести.

Руководствуясь соображениями симметрии, можно указать положение центра тяжести однородных тел простой формы (рис. 3.10):

диск и шар — в центре;

пластинка в форме параллелограмма и брус в форме параллелепипеда — в точке пересечения их диагоналей;

цилиндр — на середине его оси.

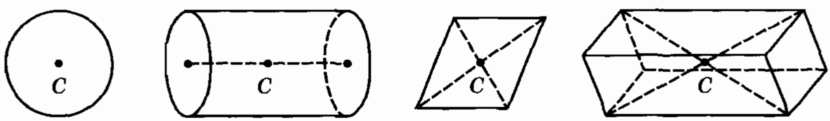


Рис. 3.10

Сила притяжения тел к Земле — сила тяжести — одно из проявлений силы всемирного тяготения. Эта сила приложена в точке, называемой центром тяжести тела.

? 1. Где больше ускорение свободного падения: в Москве или в Санкт-Петербурге?

2. Известно, что Луна притягивается к Земле с силой $F = 2 \cdot 10^{20}$ Н. Вычислите массу Луны.

3. Может ли центр тяжести находиться вне тела?

4. Где находится центр тяжести однородной пластинки треугольной формы?

5. Вырежьте из картона несколько пластинок произвольной формы и опытным путем найдите их центр тяжести.

§ 3.7. ДВИЖЕНИЕ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ. РАСЧЕТ ПЕРВОЙ КОСМИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ

Первый в истории искусственный спутник Земли был запущен в нашей стране 4 октября 1957 г. Займемся космическими расчетами.

Вычислим, какой скоростью должен обладать искусственный спутник Земли, чтобы он двигался по круговой орбите[1] на высоте h над поверхностью Земли.

На больших высотах воздух сильно разрежен и оказывает незначительное сопротивление движущимся телам. Поэтому можно считать, что на спутник действует только гравитационная сила, направленная к центру Земли (рис. 3.11):

$$F = G\frac{Mm}{(R+h)^2},$$

где M — масса Земли, m — масса спутника и R — радиус Земли. Эта сила сообщает спутнику центростремительное ускорение:

$$a = \frac{v^2}{R+h}.$$

[1] Для упрощения расчетов мы рассматриваем движение спутника по круговой орбите. Между тем спутники, вообще говоря, движутся по эллиптическим, а не круговым орбитам.

По второму закону Ньютона

$$a = \frac{F}{m} = G\frac{M}{(R+h)^2}.$$

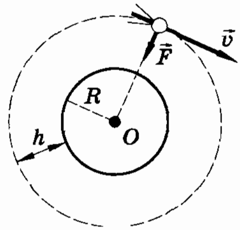


Рис. 3.11

Следовательно,

$$\frac{v^2}{R+h} = G\frac{M}{(R+h)^2}.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{G\frac{M}{R+h}}. \qquad (3.7.1)$$

Скорость спутника зависит от его высоты над поверхностью Земли: чем больше эта высота, тем с меньшей скоростью он будет двигаться по круговой орбите. Примечательно, что эта скорость не зависит от массы спутника. Значит, спутником Земли может стать любое тело, если ему сообщить на данной высоте направленную перпендикулярно радиусу Земли скорость, модуль которой определяется выражением (3.7.1).

Скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно стало спутником планеты, называется первой космической скоростью.

Первую космическую скорость v_{I} для Земли у ее поверхности можно найти, пользуясь формулой (3.7.1), если принять $h = 0$:

$$v_{\mathrm{I}} = \sqrt{G\frac{M}{R}}. \qquad (3.7.2)$$

Из формулы (3.6.4) следует, что

$$GM = gR^2.$$

С учетом этого формула (3.7.2) примет такой вид:

$$v_{\mathrm{I}} = \sqrt{gR}. \qquad (3.7.3)$$

Так как $g \approx 9{,}8$ м/с^2, а $R \approx 6{,}4 \cdot 10^6$ м, то первая космическая скорость для Земли у ее поверхности оказывается равной

$$v_{\mathrm{I}} \approx 8 \text{ км/с}.$$

Такую скорость спутникам способны сообщать только мощные космические ракеты.

В настоящее время вокруг Земли обращаются тысячи искусственных спутников. Руками человека за последнее тридцатипятилетие создавались и искусственные спутники Луны, планет Венера и Марс, а также Солнца.

Любое тело может стать искусственным спутником другого тела (планеты), если сообщить ему необходимую скорость.

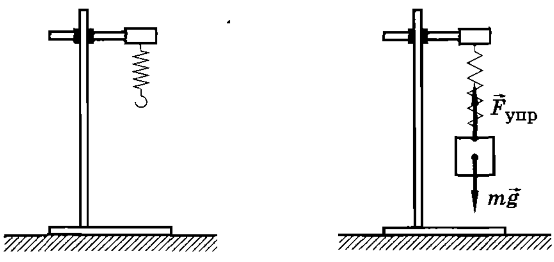
§ 3.8. ДЕФОРМАЦИЯ И СИЛА УПРУГОСТИ

На лежащую на столе книгу действует сила тяжести (она, как мы знаем, действует всегда!). Тем не менее книга не проваливается сквозь стол. Значит, сила тяжести уравновешивается какой-то другой силой. Что это за сила и как она возникает?

Возникновение силы упругости

Укрепим в лапке штатива один конец пружины (рис. 3.12, *а*). Подвесим к свободному концу пружины груз — пружина растянется (рис. 3.12, *б*). Груз немного покачается и остановится. Почему же он не падает, не получает ускорения? Ведь на него действует сила тяжести. Ответ на этот вопрос, вероятно, вас не затруднит. Причина состоит в том, что при растяжении (деформации) пружины появилась еще одна сила, которая тоже действует на груз. Она по модулю равна силе тяжести, но направлена в противоположную сторону, т. е. вертикально вверх (рис. 3.12, *б*). Эта сила, действующая со стороны растянутой пружины на груз, называется с и л о й у п р у г о с т и.

И на книгу, лежащую на столе, тоже действует сила упругости со стороны стола. Она возникает вследствие деформации стола (не растяжения, конечно, а изгиба его крышки). Правда,



а) *б*)

Рис. 3.12

этот изгиб на глаз не заметишь. Но точные приборы в состоянии его обнаружить.

Электромагнитная природа сил упругости

Все тела состоят из молекул и атомов, которые в свою очередь состоят из электронов и атомных ядер, т. е. заряженных частиц (электроны заряжены отрицательно, а атомные ядра — положительно). Поэтому между молекулами (атомами) тел одновременно действуют силы электрического притяжения (разноименные заряды) и отталкивания (одноименные заряды). Модули этих сил зависят от расстояния между молекулами. На расстоянии, примерно равном диаметру молекулы, силы притяжения между молекулами компенсируются силами отталкивания между ними, и равнодействующая сил притяжения и отталкивания между молекулами равна нулю. При растяжении тела расстояние между молекулами несколько увеличивается, и силы притяжения между ними начинают превосходить по модулю силы отталкивания — между молекулами начинают действовать силы притяжения, препятствующие растяжению тела.

При сжатии тела расстояние между молекулами уменьшается, вследствие чего между ними начинают преобладать силы отталкивания, препятствующие сжатию тела.

Итак, при растяжении или сжатии тела в нем возникают электромагнитные по своей природе силы, препятствующие изменению размеров тела. Это и есть силы упругости.

Деформации тел и силы упругости

Растяжение и сжатие (рис. 3.13, *а*, *б*) представляют собой деформации тела. Вообще под деформацией тела понимают из-

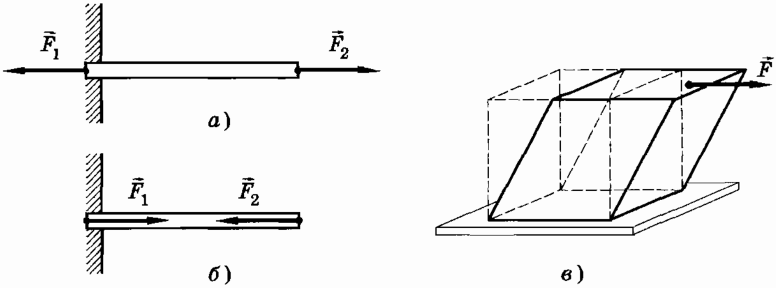


Рис. 3.13

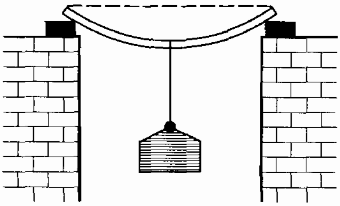


Рис. 3.14

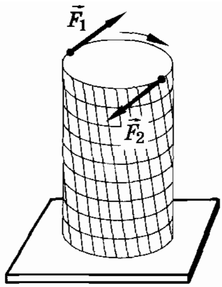


Рис. 3.15

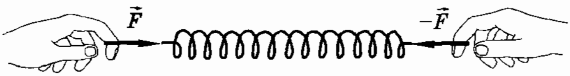


Рис. 3.16

менение его размеров или формы. Сдвиг (рис. 3.13, *в*), изгиб (рис. 3.14) и кручение (рис. 3.15) — все это также различные виды деформаций.

Силы упругости возникают только при деформации тел, а их числовые значения определяются размерами этих деформаций. Сила упругости направлена в сторону, противоположную направлению перемещения частиц тела при его деформации.

Так, например, при растяжении пружины (рис. 3.16) возникает сила упругости, действующая на руки. При прогибе сетки батута (рис. 3.17) возникает упругая сила, подбрасывающая акробата. При исчезновении деформации исчезают и силы упругости.

Сила, действующая со стороны деформированного тела на соприкасающиеся с ним тела и направленная в сторону, противоположную перемещению частей тела при его деформации, называется силой упругости.

Упругие и пластичные тела

Хотя силы упругости появляются только при деформациях, не всегда деформации приводят к появлению сил упругости.

Тела, которые полностью восстанавливают свою форму или объем после прекращения действия сил, вызывающих деформации, называются у п р у г и м и телами.

Но наряду с упругими телами (резиновый шнур, стальной шарик и др.) имеются пластичные тела, которые после прекращения действия внешних сил, вызвавших деформацию, не восстанавливают своей формы (мокрая глина, свинцовый шарик).

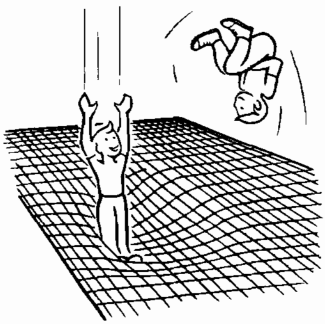


Рис. 3.17

При деформации этих тел также возникает сила, но это не сила упругости, так как ее значение зависит не от деформации, а от скорости возникновения деформации. Чем больше эта скорость, тем больше сила. Мы в дальнейшем преимущественно будем рассматривать только деформацию упругих тел.

Упругие свойства твердых тел, жидкостей и газов

Твердые тела сохраняют свой объем и форму, так как при любой попытке их деформировать возникают силы упругости.

Жидкости формы не сохраняют. Вы можете перелить воду из графина в стакан, и это не вызовет появления сил упругости. Но попробуйте ее сжать хотя бы внутри велосипедного насоса или просто в бутылке. Сила упругости не замедлит сказаться. Точно так же сила упругости появляется при сжатии в насосе воздуха.

Итак, силы упругости возникают всегда при попытке изменить объем или форму твердого тела, при изменении объема жидкости, а также при сжатии газа. В отличие от жидкости газ всегда сжат. Поэтому газ, содержащийся в каком-нибудь замкнутом сосуде, всегда обладает упругостью.

Отметим еще одно важное свойство сил упругости. Они направлены перпендикулярно (нормально) поверхности соприкосновения взаимодействующих тел. Именно по этой причине в предыдущей главе мы силу реакции опоры $\vec{N}$ считали перпендикулярной поверхности опоры. Однако при наличии деформации сдвига силы упругости имеют и касательную составляющую.

Как возникает деформация тела?

Деформация тела возникает лишь в том случае, когда одни части тела перемещаются относительно других. Например, когда растягивают резиновый шнур, различные части его перемещаются на различные расстояния. Больше всего смещаются

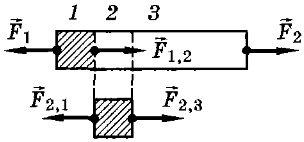


Рис. 3.18

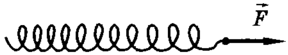


Рис. 3.19

края, а середина остается на месте. В результате шнур оказывается деформированным и в нем возникают силы упругости.

Рассмотрим подробнее, как происходит деформация (растяжение) шнура. На рисунке 3.18 изображен шнур, к концам которого приложены силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, равные по модулю. Мысленно разделим шнур на несколько участков: *1, 2, 3,* ... . Приложенная к левому концу шнура сила $\vec{F}_1$ вызывает ускорение участка *1*. Он начинает двигаться влево. При этом шнур растягивается, и на участок *1* со стороны соседнего участка *2* начинает действовать сила упругости $\vec{F}_{1,2}$. Сначала $F_{1,2} < F_1$, поэтому участок *1* продолжает с ускорением (уменьшающимся по модулю) двигаться влево, вследствие чего деформация шнура увеличивается. При этом сила $\vec{F}_{1,2}$ растет по модулю, и наступит момент, когда сила упругости $\vec{F}_{1,2}$ станет по модулю равна силе $\vec{F}_1$.

На участок *2* вначале действует только сила упругости $\vec{F}_{2,1}$ со стороны участка *1*, и участок *2* тоже движется влево с ускорением. Но по мере растяжения шнура возникает сила упругости $\vec{F}_{2,3}$, действующая на участок *2* со стороны соседнего правого участка *3*. И здесь вначале $F_{2,3} < F_{2,1}$. Поэтому участок *2* перемещается влево с уменьшающимся по модулю ускорением. Вскоре установится равновесие: $F_{2,1} = F_{2,3} = F_1$. В конце концов во всех сечениях растянутого шнура, все участки которого неподвижны, будут действовать одинаковые силы упругости, равные по модулю внешним силам $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, приложенным к концам шнура ($F_1 = F_2$).

Основной причиной рассмотренного процесса является то, что внешняя сила сообщает ускорение не всем элементам тела одновременно, а лишь той его части, на которую эта сила непосредственно действует.

Значительный интерес представляет деформация тела, к которому приложена внешняя сила лишь на одном конце. Такое тело, двигаясь ускоренно, оказывается растянутым неодинаково по длине. В качестве примера рассмотрим мягкую пружину, к правому концу которой приложена сила (рис. 3.19). Больше будут растянуты участки пружины, которые расположены справа, т. е. ближе к месту, где приложена внешняя сила. Ведь здесь сила упругости должна сообщить ускорение почти всему телу (масса велика), а сила упругости вблизи противоположного конца сообщает то же самое ускорение лишь малой части тела (масса мала).

При торможении быстро движущегося тела с помощью силы, приложенной к одному из участков поверхности тела, возникают деформации и сила упругости. Так, при падении мяча на пол нижние участки мяча при столкновении с жестким полом резко тормозятся, а верхние в первый момент продолжают по инерции двигаться вниз. В результате мяч сплющивается, и возникают силы упругости, останавливающие весь мяч. Деформация и силы упругости будут большими в нижней части мяча.

При большой разности ускорений соседних частей тела может оказаться, что возникающая вследствие большой деформации сила упругости превосходит определенный допустимый предел. Тогда тело разрушается. Например, при падении стеклянного стакана на твердый пол нижняя часть стакана почти мгновенно останавливается, в то время как верхняя часть продолжает двигаться. В результате возникает слишком большая деформация, и стакан разбивается.

Чтобы избежать больших ускорений, способных вызвать разрушения тел, применяют пружины (например, в подъемных кранах между тросом и крюком или в буферах вагонов), которые способны значительно растягиваться или сжиматься. Благодаря этому тела постепенно набирают нужную скорость или постепенно тормозятся, и разрушения не происходит. Процесс изменения скорости длится дольше, поэтому ускорения, а значит, и силы не достигают больших значений. Так, при падении стакана на мягкий ковер последний играет роль пружины: прогибаясь, он постепенно замедляет движение нижней части стакана.

В отличие от сил тяготения, действующих между телами всегда, для возникновения сил упругости необходимо определенное условие: тела должны быть деформированы.

§ 3.9. ЗАКОН ГУКА

Выясним, от чего зависит сила упругости.

Зависимость силы упругости от деформации установил экспериментально современник Ньютона английский ученый Роберт

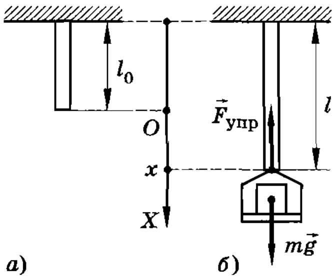


Рис. 3.20

Гук. Открытый Гуком закон справедлив только для упругой деформации, т. е. для тех случаев, когда после прекращения действия сил, деформирующих тело, оно возвращается в исходное состояние (восстанавливаются форма и размеры тела).

Рассмотрим, как можно установить этот закон для деформации растяжения резинового шнура.

Возьмем резиновый шнур; расположив его вертикально, закрепим верхний конец. Начальная длина шнура l_0 (рис. 3.20, *а*). Координатную ось X направим вдоль шнура вертикально вниз, а начало координат совместим с нижним концом нерастянутого шнура.

Прикрепим к нижнему концу шнура чашку с находящимся на ней грузом (рис. 3.20, *б*). Шнур растянется, и его длина станет равной l, а координата нижнего его конца примет значение x. Сила упругости $\vec{F}_{упр}$ растянутого шнура уравновешивает силу тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$, действующую на чашку с грузами, т. е. $F_{упр} = mg$. Удлинение шнура $\Delta l = l - l_0 = x$.

Меняя число гирек на чашке, мы можем изменять длину, а следовательно, и удлинение (деформацию) шнура Δl. Опыт показывает, что модуль силы упругости при не слишком больших удлинениях прямо пропорционален изменению длины шнура.

Этот вывод справедлив не только для резинового шнура. В таблице 4 представлены результаты лабораторного исследования зависимости силы упругости от удлинения стальной проволоки (ее начальная длина 120 см, а диаметр 0,3 мм).

Таблица 4

Δl, мм	0,9	2,0	2,8	3,8	4,7	5,7	6,6	7,5
$F_{упр}$, Н	10	20	30	40	50	60	70	80

На рисунке 3.21 изображен экспериментальный график этого исследования. В пределах допущенных погрешностей измерения график можно считать прямой линией. Значит, сила упругости $F_{упр}$ здесь тоже пропорциональна удлинению Δl. Такой же вывод получается на основании многих других исследований деформаций растяжения, а также сжатия.

Таким образом, при упругой деформации растяжения (или сжатия) модуль силы упругости прямо пропорционален модулю изменения длины тела. В этом и состоит закон Гука.

Записывается закон Гука так:

$$F_{упр} = k|\Delta l| \text{ или } F_{упр} = k|x|. \qquad (3.9.1)$$

Коэффициент пропорциональности k называют **коэффициентом упругости** или **жесткостью**.

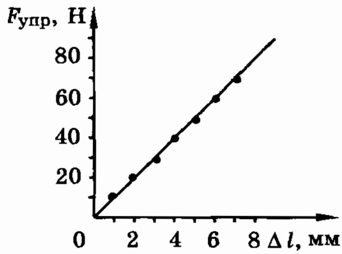


Рис. 3.21

В СИ жесткость выражается в ньютонах на метр (Н/м). Жесткость зависит от материала, из которого изготовлено тело, от его размеров и формы.

Учитывая, что координата x тела и проекция $(F_{упр})_x$ силы упругости на ось X имеют противоположные знаки, можно записать:

$$\boxed{(F_{упр})_x = -kx.} \qquad (3.9.2)$$

Закону Гука подчиняются деформации, возникающие в стержнях из стали, чугуна, алюминия и в других твердых телах, а также пружинах. Закон Гука выполняется и для деформации сжатия. Формулы (3.9.1) и (3.9.2) справедливы и в этом случае.

На рисунке 3.22 приведен график зависимости модуля силы упругости от модуля деформации, а на рисунке 3.23 — график зависимости проекции силы упругости $(F_{упр})_x$ от координаты x.

Обратим внимание на то, что закон Гука выполняется только при малых деформациях. При больших деформациях сила упругости перестает быть пропорциональной изменению длины, а при достаточно больших деформациях тело разрушается.

Когда деформации малы, силы упругости удобно определять не по деформации, а по тому ускорению, которое эти силы сообщают

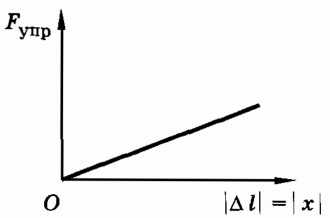


Рис. 3.22

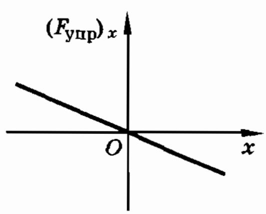


Рис. 3.23

телам. Так, например, можно определять натяжение нитей, веревок и т. д. Если же тело покоится, то модуль силы упругости, действующей на него, можно определить из условия равенства нулю векторной суммы всех сил, приложенных к телу. Например, силу реакции, с которой горизонтальная опора действует на неподвижное тело, легко определить из условия, что эта сила должна при равновесии тела быть равной по модулю силе тяжести.

Сила упругости в отличие от силы тяготения зависит не от расстояния между различными телами, а от изменения расстояния между частями одного и того же тела.

§ 3.10. ВЕС ТЕЛА

Вес — очень знакомое слово. Однако очень часто, к сожалению, смешивают понятия «сила тяжести» и «вес тела», а в быту вес отождествляют с массой. Что же это за величина — вес?

С этой величиной вы знакомились в начальном курсе физики. Теперь мы это знакомство расширим и углубим.

В принципе вполне можно обойтись без этого понятия. Вес, как мы сейчас увидим, не что иное, как одно из проявлений сил упругости. Но слово «вес» укоренилось в обиходе, и избавиться от него не так-то просто.

Если тело лежит на опоре, то вследствие притяжения Землей оно давит на опору. По этой же причине подвешенное тело растягивает подвес.

Сила, с которой тело вследствие его притяжения Землей действует на опору или растягивает подвес, называется весом тела.

Тело и опора неподвижны или движутся без ускорения

Пусть тело A находится на горизонтальной опоре B (рис. 3.24). На тело A действует сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$. Но если опора действует на тело с силой $\vec{N}$, то и тело действует на опору с силой $\vec{P}$, которая в соответствии с третьим законом Ньютона равна по модулю и противоположна по направлению $\vec{N}$: $\vec{P} = -\vec{N}$. Сила $\vec{P}$ и есть в е с т е л а.

Если тело и опора неподвижны или движутся равномерно и прямолинейно, т. е. без ускорения, то, согласно второму закону Ньютона,

$$\vec{N} + m\vec{g} = 0.$$

Так как

$$\vec{N} = -\vec{P}, \text{ то } -\vec{P} + m\vec{g} = 0.$$

Следовательно,

$$\vec{P} = m\vec{g}. \qquad (3.10.1)$$

Значит, *если ускорение* $a = 0$, *то вес тела равен силе тяжести. Однако следует иметь в виду, что сила тяжести приложена к телу, а вес приложен к опоре или подвесу.*

Природа силы тяжести и веса тоже различна. Если сила тяжести является результатом взаимодействия тела и Земли (сила тяготения), то вес появляется в результате совсем другого взаимодействия: взаимодействия тела A и опоры B. Опора B и тело A при этом деформируются, что приводит к появлению сил упругости.

Таким образом, *вес тела* (как и сила реакции опоры) *является частным видом силы упругости.*

Вес обладает особенностями, существенно отличающими его от силы тяжести.

Во-первых, вес определяется всей совокупностью действующих на тело сил, а не только силой тяжести (так, вес тела в жидкости или воздухе меньше, чем в вакууме, из-за появления выталкивающей (архимедовой) силы). Во-вторых, вес тела, как мы скоро увидим, существенно зависит от ускорения, с которым движется опора (подвес).

Пока же остановимся на простом и практически удобном методе измерения масс тел с помощью взвешивания.

Измерение массы тела на рычажных весах

Положим на одну чашку равноплечих весов тело, массу которого мы хотим измерить, а на другую чашку поставим такой набор гирь (их масса известна), чтобы весы оказались в равновесии (рис. 3.25). Тогда масса $m_т$ тела равна массе $m_г$ гирь.

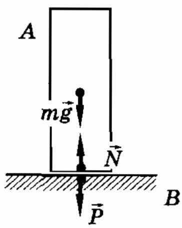


Рис. 3.24

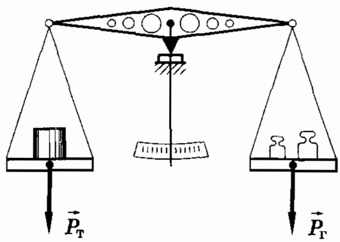


Рис. 3.25

В самом деле, так как весы находятся в равновесии, то силы, с которыми давят на чашки весов тело и гири, т. е. вес тела и вес гирь, равны между собой[1]. Но вес тела, согласно формуле (3.10.1), равен $P_т = m_т g$, а вес гирь равен $P_г = m_г g$. Значит,

$$m_т g = m_г g,$$

откуда

$$m_т = m_г. \qquad (3.10.2)$$

Описанный способ измерения массы тела называется **взвешиванием**.

Мы установили, что вес — это разновидность силы упругости.

§ 3.11. НЕВЕСОМОСТЬ И ПЕРЕГРУЗКИ

Можно ли увеличить или уменьшить вес тела, не изменяя самого тела? Оказывается, да. Рассмотрим, как это происходит.

Вес тела при движении опоры или подвеса с ускорением

Пусть тело находится в кабине лифта, движущегося с ускорением $\vec{a}$ (рис. 3.26, *а*, *б*). Согласно второму закону Ньютона

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}, \qquad (3.11.1)$$

где $\vec{N}$ — сила реакции опоры (пола лифта), m — масса тела.

По третьему закону Ньютона вес тела $\vec{P} = -\vec{N}$, поэтому, учитывая (3.11.1), получим

$$\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a}). \qquad (3.11.2)$$

Направим координатную ось Y системы отсчета, связанной с Землей, вертикально вниз. Тогда проекция веса тела на эту ось будет равна

$$P_y = m(g_y - a_y). \qquad (3.11.3)$$

---

[1] Для равновесия весов требуется равенство моментов сил (см. начальный курс физики). Но для равноплечих весов равенство моментов приводит к равенству сил.

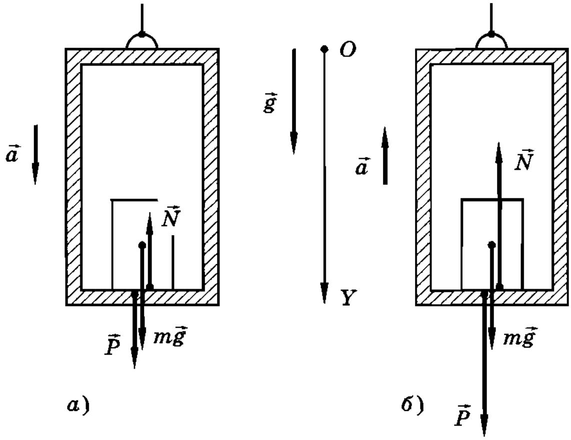


Рис. 3.26

Так как векторы $\vec{P}$ и $\vec{g}$ сонаправлены с осью координат Y, то $P_y = P$ и $g_y = g$. Если ускорение $\vec{a}$ направлено вниз (рис. 3.26, *а*), то $a_y = a$, и равенство (3.11.3) принимает следующий вид:

$$P = m(g - a). \quad (3.11.4)$$

Из формулы (3.11.4) следует, что лишь при $a = 0$ вес тела равен силе тяжести. При $a \neq 0$ вес тела отличается от силы тяжести. При движении лифта с ускорением, направленным вниз (например, в начале спуска лифта или в процессе его остановки при движении вверх) и по модулю меньшим ускорения свободного падения, вес тела меньше силы тяжести. Следовательно, в этом случае вес тела меньше веса того же тела, если оно находится на покоящейся или равномерно движущейся опоре (подвесе). По этой же причине вес тела на экваторе меньше, чем на полюсах Земли, так как вследствие суточного вращения Земли тело на экваторе движется с центростремительным ускорением.

Невесомость

При свободном падении лифта $\vec{a} = \vec{g}$ и $P = m(g - g) = 0$. Это означает, что наступило состояние невесомости. Тела не давят на опоры, и на них не действуют силы реакций опор. В этом случае и тело, и опора не деформированы. Создается впечатление исчезновения притяжения к Земле. Хотя на самом деле это не так, Земля притягивает и тело, и опору, сообщая им одинаковое ускорение свободного падения g. Поэтому тело не давит на опору. **Любое тело находится в состоянии невесомости, если на него действуют только силы тяготения.** В таких условиях находятся свободно падающие тела, например тела в космическом корабле. Ведь и космический корабль, и тела в нем тоже находятся в состоянии длительного свободного падения. Впрочем, в состоянии невесомости, хотя и непродолжительно, находится каждый из вас, спрыгивая со стула на пол или подпрыгивая вверх.

Перегрузки

Рассмотрим теперь, что произойдет, если лифт движется с ускорением $\vec{a}$, направленным вертикально вверх (рис. 3.26, *б*). В данном случае вместо равенства (3.11.4) будем иметь равенство

$$P = m(g + a). \tag{3.11.5}$$

Вес тела в лифте, движущемся с ускорением, направленным вертикально вверх, больше веса покоящегося тела. Увеличение веса тела, вызванное ускоренным движением опоры (или подвеса), называется п е р е г р у з к о й. Перегрузку можно оценить, найдя отношение веса ускоренно движущегося тела к весу покоящегося тела:

$$k = \frac{m(g + a)}{mg} = 1 + \frac{a}{g}. \tag{3.11.6}$$

Тренированный человек способен кратковременно выдерживать примерно шестикратную перегрузку. Значит, ускорение космического корабля, согласно формуле (3.11.6), не должно превосходить пятикратного значения ускорения свободного падения.

Вес тела зависит от ускорения опоры, на которой оно стоит, или ускорения подвеса, на котором оно висит. При свободном падении наступает невесомость.

? 1. Как измерить массу тела в условиях невесомости?
2. Можно ли на спутнике определить массу тела с помощью рычажных весов и гирь?

§ 3.12. ДЕФОРМАЦИЯ ТЕЛ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И СИЛЫ УПРУГОСТИ

Одной из наиболее распространенных причин, вызывающих деформацию тел, является действие силы тяжести. Именно за счет этой силы возникают деформации, порождающие такие частные виды сил упругости, как вес тела и сила реакции опоры.

Пусть опора неподвижна (или движется равномерно и прямолинейно) относительно Земли. В этом случае, как мы выяснили в § 3.10, вес тела, т. е. сила, с которой тело давит на опору, равен силе тяжести, действующей на это тело.

Обратим прежде всего внимание на то, что вес и сила тяжести не только имеют различное происхождение, но и по-разному действуют на тела. Сила тяжести непосредственно действует на все частицы тела (рис. 3.27, *а*). Все частицы независимо друг от друга притягиваются Землей. Вес же тела $\vec{P}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$ действуют только в местах соприкосновения тел (рис. 3.27, *б*). Это и приводит к тому, что в теле, стоящем на подставке, и в самой подставке всегда возникают деформации и соответственно силы упругости.

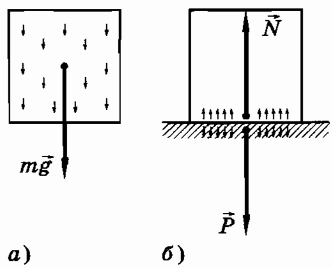


Рис. 3.27

В самом деле, мысленно разобьем тело высотой H на три (для простоты) слоя (рис. 3.28). Очевидно, что сила реакции опоры $\vec{N}_3$, равная по модулю весу всего тела, непосредственно действует только на нижнюю поверхность нижнего слоя. Вес верхнего слоя $\vec{P}_1$ (именно вес, а не сила тяжести) по третьему закону Ньютона равен силе реакции опоры $\vec{N}_1$ со стороны верхней поверхности среднего слоя. Поэтому под действием верхнего слоя средний слой будет сжат и возникшие в нем силы упругости в сумме по всему сечению будут по модулю равны весу верхнего

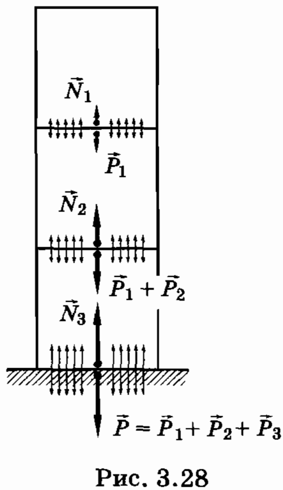


Рис. 3.28

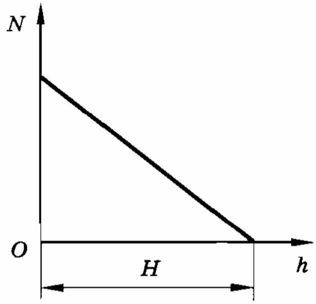


Рис. 3.29

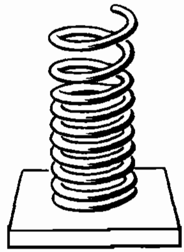


Рис. 3.30

слоя. Нижний слой будет деформирован еще сильнее, так как сумма сил упругости по модулю равна суммарному весу верхнего и среднего слоев: $P_1 + P_2$ и т. д.

Легко теперь представить распределение деформаций и сил упругости внутри любого однородного тела с постоянной площадью поперечного сечения. Деформации и силы упругости плавно возрастают от верхних слоев к нижним. Эта зависимость графически изображена на рисунке 3.29.

Наиболее сильно сжат слой, примыкающий к опоре. Именно за счет деформации тела у опоры и возникает вес $\vec{P}$. Таким образом, вес является силой упругости. Точно так же сила реакции опоры со стороны подставки возникает вследствие наибольшей деформации опоры. Значит, и сила реакции опоры тоже является силой упругости[1].

Картина возникновения деформаций и сил упругости внутри тела проста. Под влиянием притяжения к Земле отдельные части тела начинают смещаться вниз — падать. Но жесткая опора препятствует заметным перемещениям основания тела. В результате смещения частей тела продолжаются до тех пор, пока вызванные ими деформации не приведут к появлению сил упругости, препятствующих дальнейшему перемещению частей тела. Тело окажется деформированным. Если тело легко деформируется, как, например, мягкая пружина, то деформации хорошо заметны (рис. 3.30).

Итак, когда опора покоится или движется без ускорения и, следовательно, вес находящегося на ней тела равен силе тяжести (см. § 3.11), то в теле возникают деформации и обычное распределение сил упругости (см. рис. 3.28).

---

[1] Даже пластичные тела при очень малых деформациях ведут себя как упругие. Именно поэтому и мокрая глина действует на опору с определенной силой.

Иное дело, когда опора движется с ускорением. В § 3.11 мы выяснили, что если ускорение $\vec{a}$ направлено вверх, то вес тела возрастает. Он становится равным

$$P = m(g + a).$$

Соответственно возрастают деформации и силы упругости внутри тела, т. е. появляются перегрузки. Напротив, если вектор ускорения $\vec{a}$ направлен вниз, то деформации делаются меньше обычных (при $a < g$), так как в этом случае вес

$$P = m(g - a).$$

Наконец, при $a = g$ возникает состояние невесомости ($P = 0$), при котором деформации и силы упругости внутри тела, в частности внутри тела человека, исчезают. Это приводит к ряду физиологических последствий, сказывающихся на ощущениях и поведении человека в состоянии невесомости. Ведь при обычных условиях деформации и упругие напряжения внутри тел существуют, но мы их не замечаем, так как привыкли к ним.

Отметим, что погруженное в жидкость тело может находиться в равновесии, если сила тяжести, действующая на тело, равна выталкивающей (архимедовой) силе. Но это состояние совершенно не эквивалентно состоянию невесомости при свободном падении тела. В данном случае сила тяжести уравновешивается архимедовой силой, действующей на поверхность тела, и существующие в обычных условиях силы упругости внутри тела не исчезают.

Тело, стоящее на опоре или закрепленное на подвесе, подвергается деформации только при совместном действии силы тяжести и силы упругости со стороны опоры или подвеса.

§ 3.13. СИЛА ТРЕНИЯ. ПРИРОДА И ВИДЫ СИЛ ТРЕНИЯ

Третий тип сил, с которыми имеют дело в механике, — это силы трения. Силы трения, как и силы упругости, имеют электромагнитную природу, т. е. в основе сил трения лежат электрические силы взаимодействия молекул. Главная особенность сил трения, отличающая их от гравитационных сил и сил упругости, состоит в том, что они зависят от скорости движения тел относительно друг друга.

Познакомимся сначала с силами трения между поверхностями твердых тел. Эти силы возникают при непосредственном соприкосновении тел и всегда направлены вдоль поверхностей соприкосновения в отличие от сил упругости, направленных перпендикулярно этим поверхностям. Сила трения возникает при движении одного тела по поверхности другого, но она может существовать между соприкасающимися твердыми телами, когда эти тела неподвижны относительно друг друга. Всегда силы трения препятствуют относительному перемещению тел.

Природа трения

Причина, по которой книга не соскальзывает со слегка наклонного стола, — шероховатость поверхности стола и обложки книги. Эта шероховатость заметна на ощупь, а под микроскопом видно, что поверхность твердого стола более всего напоминает горную страну. По этой же причине лошади нужно приложить большое усилие, чтобы сдвинуть с места тяжелый груз (рис. 3.31). Бесчисленные выступы цепляются друг за друга, деформируются и не дают книге или грузу скользить. Таким образом, сила трения покоя вызвана теми же силами взаимодействия молекул, что и обычная сила упругости.

При скольжении одного тела по поверхности другого происходит «скалывание» бугорков, разрыв молекулярных связей, не способных выдержать возросшую нагрузку. Обнаружить «скалывание» бугорков не представляет труда: результатом такого «скалывания» является износ трущихся деталей.

Казалось бы, чем тщательнее отполированы поверхности, тем меньше должна быть сила трения. До известной степени это так. Шлифовка снижает, например, силу трения между

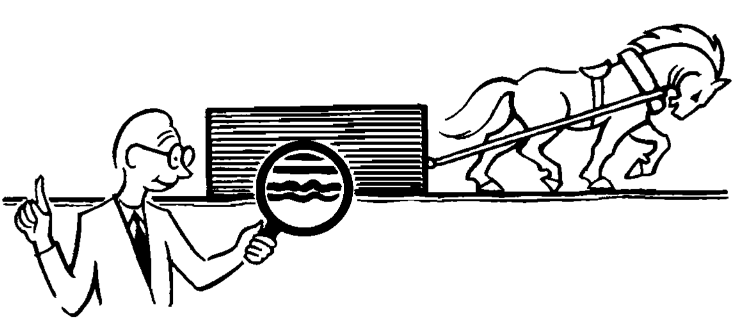


Рис. 3.31

двумя стальными брусками, но не беспредельно. При дальнейшем увеличении гладкости поверхностей сила трения начинает расти. Дело здесь в следующем.

По мере сглаживания поверхностей они все плотнее и плотнее прилегают друг к другу. Однако до тех пор, пока высота неровностей превышает несколько молекулярных радиусов, силы взаимодействия между молекулами соседних поверхностей (кроме самих бугорков) отсутствуют. Ведь это очень короткодействующие силы. Их действие простирается на расстояния в несколько молекулярных радиусов. Лишь при достижении некоего совершенства шлифовки поверхности сблизятся настолько, что силы притяжения (сцепления) молекул охватят значительную часть поверхности соприкосновения брусков. Эти силы начнут препятствовать смещению брусков относительно друг друга, что приводит к увеличению силы трения покоя.

При скольжении гладких брусков рвутся молекулярные связи между молекулами на поверхности брусков, подобно тому как у шероховатых поверхностей разрушаются связи в самих бугорках. *Разрыв молекулярных связей — вот то главное, чем отличаются силы трения от сил упругости, при возникновении которых таких разрывов не происходит.* Именно поэтому силы трения зависят от скорости.

Ниже мы рассмотрим подробнее отдельные виды сил трения.

Трение покоя

Допустим, что вам нужно передвинуть шкаф. Вы действуете на него с силой, направленной горизонтально, но шкаф не сдвигается с места.

Это возможно только в том случае, когда приложенная к шкафу сила компенсируется (уравновешивается) какой-то другой силой. Эта сила, равная по модулю приложенной вами силе и направленная противоположно ей, и есть сила трения покоя.

Сила трения покоя — это сила, действующая на данное тело со стороны соприкасающегося с ним другого тела вдоль поверхности соприкосновения тел в случае, когда тела покоятся относительно друг друга.

Вы начинаете толкать шкаф сильнее, а он продолжает оставаться на месте. Значит, одновременно возрастает и сила трения покоя.

Сила трения покоя равна по модулю и направлена противоположно силе, приложенной к телу параллельно поверхно-

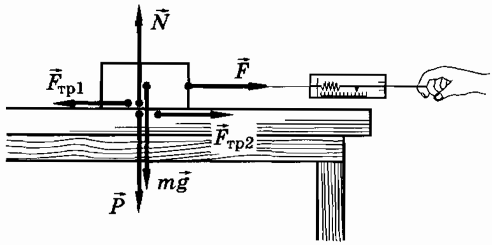


Рис. 3.32

сти соприкосновения его с другим телом. Если параллельно этой поверхности не действуют никакие силы, то сила трения покоя равна нулю.

Увеличивая силу, действующую на шкаф, вы в конце концов сдвинете его с места. Следовательно, сила трения покоя может изменяться от нуля до некоторого наибольшего значения. ***Максимальное значение силы трения, при котором скольжение еще не наступает, называется максимальной силой трения покоя.*** Если действующая на покоящееся тело сила хотя бы немного превышает максимальную силу трения покоя, то тело начинает скользить.

Выясним, от чего зависит максимальная сила трения покоя. Для этого положим на стол тяжелый деревянный брусок и начнем тянуть его с помощью динамометра (рис. 3.32). Показания динамометра в тот момент, когда брусок начинает трогаться с места, будем записывать. Они соответствуют максимальной силе трения покоя (ее модулю). Будем нагружать брусок гирями, увеличивая вес бруска $\vec{P}$, следовательно, и силу реакции опоры $\vec{N}$, в два, три раза и т. д. Заметим, что модуль максимальной силы трения покоя F_{max} тоже увеличивается в два, три раза и т. д.

Проделанный нами опыт и множество других подобных опытов позволяют сделать вывод о том, что максимальное значение модуля силы трения покоя прямо пропорционально модулю силы реакции опоры:

$$F_{max} = \mu N. \qquad (3.13.1)$$

Здесь μ — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом трения покоя.

Коэффициент трения покоя зависит от материала, из которого изготовлены соприкасающиеся тела, качества обработки их поверхностей, но, как показывает опыт, не зависит от площади их соприкосновения. Если положить брусок на меньшую грань, мы получим то же значение для коэффициента трения покоя.

В опыте, изображенном на рисунке 3.32, сила трения покоя приложена не только к бруску, но и к столу. Действительно, если стол действует на брусок с силой трения покоя $\vec{F}_{тр1}$, направленной влево, то брусок действует на стол с силой трения $\vec{F}_{тр2}$, направленной вправо, при этом, согласно третьему закону Ньютона,

$$\vec{F}_{тр1} = -\vec{F}_{тр2}.$$

Почему же сила трения покоя может изменяться от нуля до максимального значения, равного μN? Вот как это происходит. При действии на тело некоторой силы $\vec{F}$ оно слегка (незаметно для глаза) смещается. Это смещение продолжается до тех пор, пока микроскопические шероховатости поверхностей не расположатся так, что, зацепляясь друг за друга, они приведут к появлению силы трения, уравновешивающей силу $\vec{F}$. При увеличении силы $\vec{F}$ тело опять чуть-чуть сдвинется так, что мельчайшие неровности поверхностей по-иному будут цепляться друг за друга и сила трения возрастет. Лишь при $F > F_{max}$ ни при каком расположении поверхностей по отношению друг к другу сила трения не в состоянии уравновесить силу $\vec{F}$, и начинается скольжение.

Трение скольжения

Когда тело скользит по поверхности другого тела, на него тоже действует сила трения — *сила трения скольжения*. В этом можно убедиться на опыте. Прикрепленный к бруску динамометр при равномерном движении бруска по горизонтальной поверхности (рис. 3.33) показывает, что на брусок со стороны пружины динамометра действует постоянная

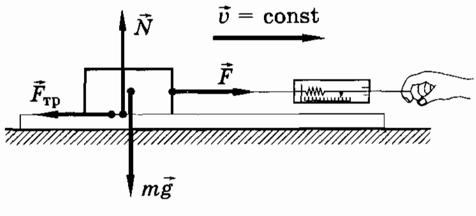


Рис. 3.33

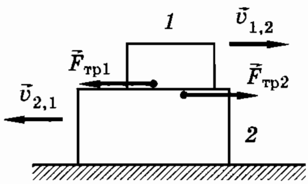


Рис. 3.34

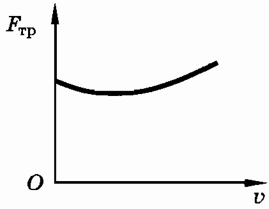


Рис. 3.35

сила упругости $\vec{F}$. Согласно второму закону Ньютона при равномерном движении бруска (ускорение $a = 0$) равнодействующая всех сил, приложенных к нему, равна нулю. Следовательно, кроме силы упругости $\vec{F}$ (сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$ уравновешиваются) во время равномерного движения на брусок действует сила, равная по модулю силе упругости, но направленная противоположно ей. Эта сила и есть *сила трения скольжения*.

Сила трения скольжения, как и максимальная сила трения покоя, зависит от силы реакции опоры $\vec{N}$, от материала трущихся тел и состояния их поверхностей. Существенно, что сила трения скольжения зависит также от относительной скорости движения тел. Во-первых, **сила трения скольжения всегда направлена противоположно относительной скорости соприкасающихся тел.** Это можно пояснить с помощью рисунка 3.34, на котором изображены два трущихся тела. Тело *1* движется относительно тела *2* со скоростью $\vec{v}_{1,2}$, направленной вправо. К телу *1* приложена сила трения $\vec{F}_{тр1}$, направленная влево. Тело *2* движется относительно тела *1* влево со скоростью $\vec{v}_{2,1}$, а приложенная к нему сила трения $\vec{F}_{тр2}$ направлена вправо.

Во-вторых, **модуль силы трения скольжения зависит и от модуля относительной скорости трущихся тел.** Зависимость модуля силы трения скольжения от модуля относительной скорости устанавливается экспериментально. Эта зависимость показана на рисунке 3.35. При малых относительных скоростях движения тел сила трения скольжения мало отличается от максимальной силы трения покоя. Поэтому приближенно можно считать ее постоянной и равной силе трения покоя:

$$F_{тр} \approx F_{max} = \mu N. \qquad (3.13.2)$$

Коэффициенты трения для некоторых материалов приведены в таблице 5.

Таблица 5

Материалы	μ
Дерево по дереву (дуб)	0,50
Дерево по сухой земле	0,71
Ремень кожаный по чугунному шкиву	0,56
Сталь по льду	0,02
Дерево по льду	0,03—0,04

Заметим, что модуль силы трения $\vec{F}_{тр}$ обычно меньше модуля силы реакции опоры $\vec{N}$. Поэтому коэффициент трения скольжения меньше единицы. По этой причине любое тело легче перемещать волоком, чем поднимать или переносить.

Сила трения зависит от относительной скорости движения тел. В этом ее главное отличие от сил тяготения и упругости, зависящих только от координат.

? Тело массой $m = 5$ кг лежит на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения $\mu = 0,2$. На тело действует горизонтальная сила $F = 5$ Н. Чему равна сила трения, если тело остается в покое?

§ 3.14. РОЛЬ СИЛ ТРЕНИЯ

Силы трения действуют между всеми без исключения телами, и с ними приходится считаться.

Сила трения во всех случаях препятствует относительному движению соприкасающихся тел. При некоторых условиях силы трения делают это движение тел просто невозможным. Однако роль сил трения не сводится только к тому, чтобы тормозить движение тел. В ряде практически очень важных случаев движение не могло бы возникнуть без действия сил трения.

Это можно проследить на примере движущегося автомобиля (рис. 3.36). Сила трения $\vec{F}_2$, действующая со стороны земли на ведомые колеса, и сила сопротивления воздуха $\vec{F}_3$ направлены назад и способны только затормо-

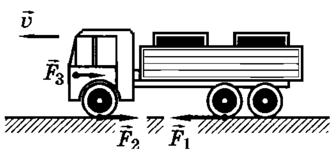


Рис. 3.36

Рис. 3.37

зить движение. Единственной внешней силой, способной увеличить скорость автомобиля, является сила трения покоя $\vec{F}_1$, действующая на ведущие колеса. Не будь этой силы, автомобиль буксовал бы на месте, несмотря на вращение ведущих колес.

Точно так же сила трения покоя, действующая на ступни ног (рис. 3.37), сообщает нашему телу ускорение, необходимое для начала движения или остановки.

Работа двигателя, приводящего во вращение ведущие колеса, или усилия мышц ног вызывают появление сил трения покоя. Эти силы возникают лишь при условии, что какие-нибудь другие силы стремятся вызвать относительное движение тел (шин или ступней ног относительно земли).

Препятствуя проскальзыванию, сила трения покоя ускоряет машину или наше тело. Но без усилия со стороны двигателя или мышц ног увеличение скорости за счет силы трения невозможно. «Полезная» сила трения не могла бы возникнуть.

На использовании трения покоя основана ременная (рис. 3.38) и фрикционная (рис. 3.39) передачи вращения от одного шкива (ведущего) к другому (ведомому).

Трение покоя полезно и во многих других случаях. Не будь трения, мы ничего не могли бы взять руками. Все предметы выскальзывали бы из рук. Трение скольжения, как и трение покоя, тоже может быть полезным и вредным. Полезно, например, трение скольжения в тормозных системах сухопутного транспорта (железнодорожного, автомобильного и т. д.). Полезно и трение скрипичного смычка о струны (для увеличения

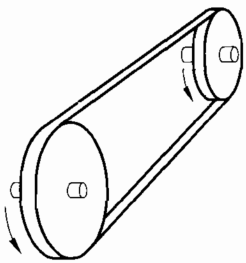


Рис. 3.38

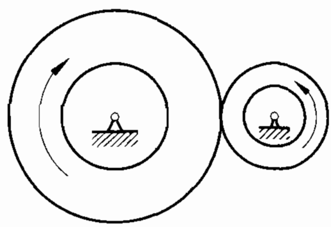


Рис. 3.39

трения смычок натирают канифолью). Однако во многих случаях трение скольжения вредно. У всех машин из-за трения скольжения происходит нагревание и износ их деталей, уменьшается коэффициент полезного действия. Значительного уменьшения силы трения скольжения достигают с помощью смазки — чаще всего тонкого слоя жидкости (обычно минерального масла) между трущимися поверхностями. Ни одна современная машина, например двигатель автомобиля или трактора, не может работать без смазки. Специальная система смазки предусматривается при конструировании всех машин.

Трение — явление, сопровождающее нас везде и повсюду. В одних случаях оно полезно, и мы всячески стараемся его увеличить. В других — вредно, и мы ведем с ним борьбу.

? 1. Посмотрите вокруг себя. Видите ли вы полезное действие сил трения?

2. Зачем на губках тисков и плоскогубцев делают насечки?

3. Для чего на автомобильных шинах делают рельефный рисунок (протектор)?

§ 3.15. СИЛА СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ТЕЛ В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

При движении твердого тела в жидкости или газе или при движении одного слоя жидкости (газа) относительно другого тоже возникает сила, тормозящая движение, — сила жидкого трения или сила сопротивления.

Сила сопротивления направлена параллельно поверхности соприкосновения твердого тела с жидкостью (газом) в сторону, противоположную скорости тела относительно среды, и тормозит движение[1].

---

[1] Впрочем, движущийся поток воды или воздуха может увлекать за собой тело. Например, когда ветер гонит опавшие листья, то сила трения со стороны воздуха направлена по движению листьев. Но и в этом случае она противоположна скорости движения тела (листьев) относительно среды (воздуха). В приведенном примере воздух и листья, хотя и движутся в одном направлении, но скорость воздуха больше, листья отстают от ветра.

Сила сопротивления (жидкого трения) обычно значительно меньше силы сухого трения. Именно поэтому для уменьшения сил трения между движущимися деталями машин применяют смазку.

Главная особенность силы сопротивления состоит в том, что она появляется только при относительном движении тела и окружающей среды. Сила трения покоя в жидкостях и газах полностью отсутствует. Это приводит к тому, что усилием рук можно сдвинуть тяжелое тело, например баржу, в то время как сдвинуть с места, скажем, гусеничный трактор усилием рук просто невозможно.

Убедитесь в том, что плавающий деревянный брусок сразу же придет в движение, если на него слегка подуть. Попробуйте проделать то же самое с бруском, лежащим на столе.

Модуль силы сопротивления $\vec{F}_c$ зависит от размеров, формы и состояния поверхности тела, свойств (вязкости) среды (жидкости или газа), в которой движется тело, и, наконец, от относительной скорости движения тела и среды.

Для того чтобы уменьшить силу сопротивления среды, телу придают обтекаемую форму. Наиболее выгодна в этом отношении сигарообразная форма (рис. 3.40), близкая к форме падающей капли дождя или рыбы. Влияние формы тела на силу сопротивления наглядно показано на рисунке 3.41. Модуль силы сопротивления цилиндра обозначим через F_0. Конусообразная насадка к цилиндру уменьшает силу сопротивления от 1/2 до $1/4F_0$ в зависимости от размера угла при вершине конуса. Сглаженная насадка доводит силу сопротивления до $1/5F_0$. Наконец, если придать телу сигарообразную форму, то при том же поперечном сечении сила сопротивления уменьшается до $1/25F_0$. По сравнению с телом сигарообразной формы сила сопротивле-

Рис. 3.40

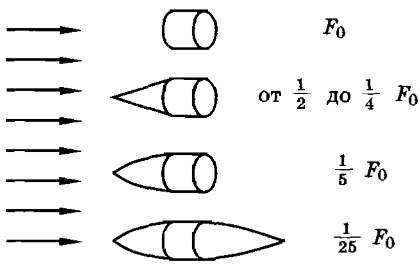


Рис. 3.41

ния для шара (имеющего такую же площадь поперечного сечения) больше в несколько раз, а для тонкого диска, плоскость которого перпендикулярна направлению скорости, — в несколько десятков раз. Особенно велика сила сопротивления, возникающая при движении полусферы вогнутой стороной вперед. По этой причине парашюты имеют часто форму полусферы.

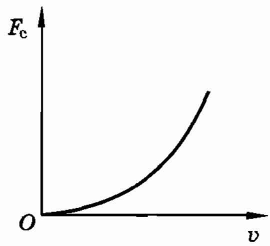


Рис. 3.42

Примерный характер зависимости модуля силы сопротивления от модуля относительной скорости тела приведен на рисунке 3.42. Если тело неподвижно относительно вязкой среды (относительная скорость равна нулю), то сила сопротивления равна нулю. С увеличением относительной скорости сила сопротивления растет медленно, а потом все быстрее и быстрее.

При малых скоростях движения в жидкости (газе) силу сопротивления можно считать приближенно прямо пропорциональной скорости движения тела относительно среды:

$$F_c = k_1 v, \qquad (3.15.1)$$

где k_1 — коэффициент сопротивления, зависящий от формы, размеров, состояния поверхности тела и свойств среды — ее вязкости. Коэффициент k_1 в СИ выражается в Н · с/м = кг/с. Его значение определяют опытным путем.

При больших скоростях относительного движения сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости:

$$F_c = k_2 v^2, \qquad (3.15.2)$$

где коэффициент сопротивления k_2 выражается в Н · с^2/м^2 = = кг/м.

Какую именно формулу следует применять в данном конкретном случае, устанавливают опытным путем. При падении тел в воздухе сила сопротивления становится пропорциональной квадрату скорости практически с самого начала падения.

При ускоренном движении тела в жидкости для учета воздействия жидкости на это тело надо к массе тела прибавить так называемую присоединенную массу. Присоединенная масса зависит от формы тела и плотности среды. В дальнейшем при решении задач присоединенную массу мы учитывать не будем.

Жидкое трение возникает между поверхностью твердого тела и окружающей его жидкой или газообразной средой, в которой оно движется. При медленном движении сила сопротивления пропорциональна скорости, а при быстром — квадрату скорости.

§ 3.16. УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ

Благодаря тому, что сила сопротивления растет с увеличением скорости, любое тело в вязкой среде при действии на него какой-либо постоянной силы, например силы тяжести, в конце концов начинает двигаться равномерно.

Модуль этой постоянной скорости зависит от модуля постоянной силы, действующей на тело, и от того, как быстро сила сопротивления растет с ростом скорости (т. е. от коэффициента сопротивления). Так, при падении шарика в вязкой жидкости (например, глицерине) уже при малых скоростях сила сопротивления достигает заметного значения. Эту силу можно считать прямо пропорциональной скорости. Тогда уравнение движения шарика будет иметь такой вид:

$$ma = F - k_1 v, \qquad (3.16.1)$$

где F — модуль постоянной силы, равной векторной сумме силы тяжести $m\vec{g}$ и архимедовой силы $\vec{F}_А$.

В самом начале движения сила сопротивления очень мала (скорость мала) и ускорение a почти равно g, если архимедова сила невелика. В дальнейшем скорость движения увеличивается и с ней вместе растет сила сопротивления. Наконец, при

$$F = k_1 v_у \qquad (3.16.2)$$

ускорение тела обращается в нуль, и начиная с этого момента тело будет двигаться с постоянной скоростью:

$$v_у = \frac{F}{k_1}. \qquad (3.16.3)$$

Чем тяжелее тело при прочих равных условиях, тем больше установившаяся скорость.

При падении тел в воздухе сила сопротивления становится заметной при достаточно больших скоростях. При скорости, близкой к установившейся, сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости. Пренебрегая архимедовой силой (она в воздухе мала), запишем уравнение движения тела в этом случае так:

$$m\vec{a} = m\vec{g} - k_2\vec{v}|\vec{v}|. \qquad (3.16.4)$$

Здесь слагаемое $-k_2\vec{v}|\vec{v}|$, соответствующее силе сопротивления воздуха, представляет собой вектор с модулем k_2v^2, направленный противоположно направлению движения, т. е. направлению скорости.

Скорость становится постоянной, когда она достигает значения

$$v_у = \sqrt{\frac{mg}{k_2}}. \qquad (3.16.5)$$

Уравнение (3.16.4) можно решить только в численном виде. Оказывается, что дальность стрельбы в реальных случаях во много раз меньше, чем она должна быть без учета сопротивления воздуха: вместо 65 км для пушки калибром 305 мм (корабельное орудие) она составляет 20 км, а для пушки калибром 76 мм (полевое орудие) — всего 6—8 км.

В воздухе тяжелые тела падают с большей установившейся скоростью, чем легкие. Соответственно они должны пролетать большее расстояние, прежде чем их скорость станет постоянной. Так, капли дождя имеют установившуюся скорость порядка нескольких метров в секунду, а авиационная бомба — несколько сотен метров в секунду. Такая большая скорость достигается лишь при падении с высоты 5—6 км.

§ 3.17. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Опять решаем задачи по динамике, как и во второй главе. Новым здесь является лишь то, что мы будем теперь использовать известные зависимости сил от расстояний и скоростей.

Задача 1

Свинцовый шар радиусом $R = 50$ см имеет внутри сферическую полость радиусом $r = 5$ см, центр которой находится на расстоянии $d = 40$ см от центра шара (рис. 3.43). С какой силой притягивается к шару материальная точка массой $m = 10$ г, находящаяся на расстоянии $l = 80$ см от центра шара, если линия, соединяющая центры шара и полости, составляет угол $\alpha = 60°$ с линией, соединяющей центр шара с материальной точкой? Плотность свинца $\rho = 11{,}3$ г/см^3.

Решение. Мысленно поместим в полость свинцовый шарик таких же размеров, как и полость, тогда свинцовый шар станет сплошным. Его масса $M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$, и сила тяготения между материальной точкой и сплошным шаром будет определяться формулой

$$F_1 = G\frac{Mm}{l^2}.$$

Сила тяготения материальной точки и маленького шарика, помещенного в полость, равна

$$F_2 = G\frac{m'm}{s^2},$$

где $m' = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$ — масса маленького шарика, а s — расстояние между центром полости и материальной точкой.

Сила $\vec{F}_1$ притяжения материальной точки к сплошному шару является геометрической суммой сил, с которыми материальная точка притягивается частями шара: шаром с полостью и маленьким шариком, помещенным в полость.

Если искомую силу обозначить через $\vec{F}$, то согласно рисунку 3.44 имеем

$$\vec{F} + \vec{F}_2 = \vec{F}_1,$$

откуда

$$\vec{F} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2.$$

Модуль искомой силы $\vec{F}$ можно найти, пользуясь теоремой косинусов:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\beta}.$$

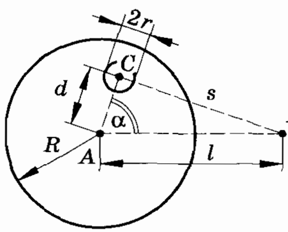


Рис. 3.43

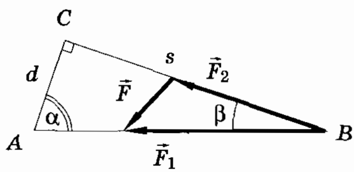


Рис. 3.44

Но для вычисления F необходимо предварительно определить s и $\cos\beta$.

Из треугольника ACB по теореме косинусов имеем:

$$s^2 = d^2 + l^2 - 2dl\cos\alpha.$$

Для того же треугольника на основании теоремы синусов[1] можно записать:

$$\frac{s}{\sin\alpha} = \frac{d}{\sin\beta}.$$

Отсюда

$$\sin\beta = \frac{d\sin\alpha}{s},$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\frac{d^2\sin^2\alpha}{s^2}} = \frac{l-d\cos\alpha}{s}.$$

Теперь можно найти модуль искомой силы:

$$F = \frac{4}{3}\pi G\rho m\sqrt{\frac{R^6}{l^4} + \frac{r^6}{(d^2+l^2-2dl\cos\alpha)^2} - \frac{2R^3r^3(l-d\cos\alpha)}{l^2(d^2+l^2-2dl\cos\alpha)^{3/2}}} \approx$$

$$\approx 5{,}7\cdot 10^{-6}\ \text{Н}.$$

Заметим, что вычислительную часть задачи можно провести проще, если, пользуясь числовыми данными условия задачи, доказать, что $\triangle ABC$ прямоугольный, тогда $s^2 = l^2 - d^2$, а угол $\beta = 30°$.

Задача 2

Тело, размерами которого можно пренебречь, помещено внутрь тонкой однородной сферы. Докажите, что сила притяжения, действующая со стороны сферы на тело, равна нулю при любом положении тела внутри сферы.

Решение. Искомая сила притяжения является векторной суммой сил притяжения, создаваемых отдельными элементами

---

[1] $\cos\beta$ можно также найти, применяя теорему косинусов для стороны AB треугольника ABC.

сферы. Рассмотрим малые элементы σ_1 и σ_2 (рис. 3.45), вырезаемые из сферы конусами с вершиной в точке A (место нахождения маленького тела), которые получаются при вращении образующей BC вокруг оси M_1M_2.

Вычислим площади $S_{\sigma 1}$ и $S_{\sigma 2}$ этих элементов. Предварительно введем понятие т е л е с н о г о у г л а.

Внутри сферы радиусом R построим конус, вершина которого находится в центре сферы (рис. 3.46). Этот конус вырежет на сфере некоторую часть поверхности площадью S. *Область пространства, ограниченную поверхностью конуса, называют телесным углом.* Мерой телесного угла Ω является отношение площади S к квадрату радиуса R сферы:

$$\Omega = \frac{S}{R^2}.$$

Чтобы вычислить площадь $S_{\sigma 1}$ элемента σ_1, который вырезан на сфере с центром в точке O конусом с вершиной в точке A, построим сферу с центром в точке A радиусом AM_1. Этот конус на новой сфере вырежет элемент σ_1' площадью S_1' (рис. 3.47, *а*). Телесный угол, ограниченный конусом с вершиной в точке A, равен:

$$\Omega = \frac{S_1'}{(AM_1)^2}.$$

Отсюда

$$S_1' = (AM_1)^2\Omega.$$

Ввиду малости элементов σ_1 и σ_1' их можно принять за плоские. Радиусы сфер OM_1 и AM_1 являются нормалями к этим

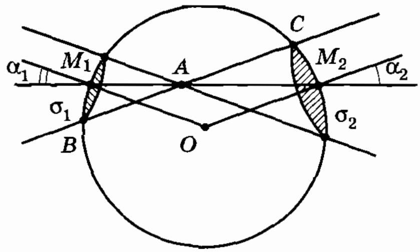


Рис. 3.45

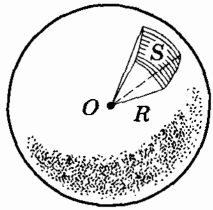


Рис. 3.46

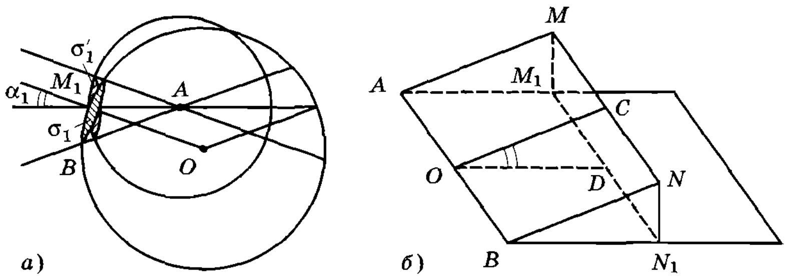


Рис. 3.47

элементам. Поэтому двугранный угол[1] между элементами σ_1 и σ_1' равен углу α_1 между прямыми OM_1 и AM_1.

Элемент σ_1' является проекцией элемента[2] σ_1 на сферу с центром в точке A. Следовательно,

$$S_1' = S_{\sigma 1}\cos\alpha_1,$$

откуда

$$S_{\sigma 1} = \frac{S_1'}{\cos\alpha_1} = \frac{(AM_1)^2\Omega}{\cos\alpha_1}.$$

Аналогично площадь элемента σ_2 равна

$$S_{\sigma 2} = \frac{(AM_2)^2\Omega}{\cos\alpha_2}.$$

Массы элементов σ_1 и σ_2 соответственно равны

$$\frac{(AM_1)^2\Omega\rho}{\cos\alpha_1} \text{ и } \frac{(AM_2)^2\Omega\rho}{\cos\alpha_2},$$

---

[1] Д в у г р а н н ы м у г л о м называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой (рис. 3.47, *б*). Полуплоскости называются г р а н я м и, а ограничивающая их прямая AB — ребром двугранного угла. Мерой двугранного угла является его линейный угол COD ($CO \perp AB$, $DO \perp AB$).

[2] Если каждую точку фигуры, расположенной в одной грани двугранного угла (например, прямоугольника $AMNB$), спроецировать на другую грань, то на этой грани получится фигура AM_1N_1B, называемая п р о е к ц и е й первой фигуры на вторую грань. Легко видеть, что площадь проекции равна площади проецируемой фигуры, умноженной на косинус угла между ними.

где ρ — поверхностная плотность данной сферы (отношение массы сферы к ее площади); $\alpha_1 = \alpha_2$, так как треугольник M_1OM_2 равнобедренный.

Силы притяжения, создаваемые элементами, соответственно равны

$$F_{\sigma 1} = G\frac{m(AM_1)^2\Omega\rho}{(AM_1)^2\cos\alpha_1} = G\frac{m\Omega\rho}{\cos\alpha_1},$$

$$F_{\sigma 2} = G\frac{m(AM_2)^2\Omega\rho}{(AM_2)^2\cos\alpha_2} = G\frac{m\Omega\rho}{\cos\alpha_2} = F_{\sigma 1},$$

где m — масса тела, находящегося в точке A. Они равны по модулю и направлены в противоположные стороны, поэтому их равнодействующая равна нулю.

Проводя аналогичные рассуждения для других элементов сферы, убеждаемся, что силы притяжения ими тела попарно компенсируются. Следовательно, сила притяжения, действующая со стороны сферы на помещенное внутри нее тело, равна нулю.

Заметим, что данный результат справедлив и для сферической оболочки конечной толщины, так как ее можно разбить на сколь угодно тонкие сферические оболочки, для каждой из которых справедливо доказанное выше утверждение.

Задача 3

Космический корабль движется вдали от планет, так что действием на него внешних гравитационных сил можно пренебречь. С какой силой F космонавт, масса которого m, будет давить на кресло во время работы двигателя, если двигатель сообщает кораблю такое же по модулю ускорение, какое сообщает телам сила тяжести вблизи поверхности Земли?

Решение. Согласно третьему закону Ньютона сила $\vec{F}$ равна по модулю и противоположна по направлению силе реакции опоры $\vec{N}$, с которой кресло корабля действует на космонавта:

$$\vec{F} = -\vec{N}.$$

Силу $\vec{N}$ можно найти по второму закону Ньютона, поскольку нам известны масса космонавта и его ускорение. Так как на космонавта действует только сила $\vec{N}$, то

$$m\vec{a} = \vec{N}.$$

Следовательно,

$$\vec{F} = -m\vec{a}.$$

Из этого равенства видно, что космонавт действует на кресло корабля с силой, направленной в сторону, противоположную направлению ускорения (рис. 3.48).

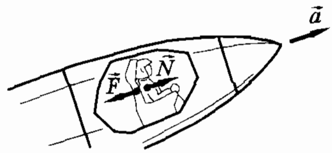


Рис. 3.48

Так как $a = g$, то

$$F = mg.$$

Мы пришли к любопытному результату: если космический корабль движется с ускорением, равным по модулю ускорению, которое сообщает телам сила тяжести вблизи поверхности Земли, то космонавт (или какой-нибудь другой предмет, находящийся в корабле) будет действовать на корабль с силой, равной его весу на Земле.

В ускоренно движущемся корабле тела начинают «весить». Ощущения космонавта будут вполне обычными. Он будет чувствовать себя как на Земле. Предметы, выпущенные из рук космонавта, будут двигаться относительно корабля так же, как если бы космонавт находился на Земле. В таком корабле все механические явления будут происходить точно так же, как на Земле. Если бы иллюминаторы в корабле были закрыты, то люди, находящиеся в нем, не могли бы определить, покоится он на Земле или движется в отсутствие сил тяготения с ускорением, равным по модулю ускорению свободного падения тел на Земле.

Что же произойдет, если выключить двигатель? В этом случае корабль будет двигаться относительно инерциальной системы отсчета равномерно и прямолинейно ($a = 0$) и, как это следует из формулы (3.11.4), тела перестанут действовать на корабль — перестанут весить. Наступит состояние невесомости[1].

Задача 4

На диске, который может вращаться вокруг вертикальной оси, лежит маленькая шайба массой $m = 100$ г. Шайба соединена с осью горизонтальной пружиной. Если число оборотов диска (частота вращения) не превышает $n_1 = 2$ об/с, пружина находится в нерастянутом состоянии. Если число оборотов диска медленно увеличивается до

---

[1] Гравитационным взаимодействием между кораблем и телами, находящимися на корабле, а также между самими телами ввиду их малости можно пренебречь.

$n_2 = 5$ об/с, то пружина удлиняется вдвое. Определите коэффициент упругости (жесткость) пружины k.

Решение. При частоте вращения диска n_1 на шайбу действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и максимальная сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$, направленная к оси диска (рис. 3.49, *а*). Под действием этих сил шайба получает центростремительное ускорение, модуль которого

$$a_1 = 4\pi^2 n_1^2 l, \qquad (3.17.1)$$

где l — длина нерастянутой пружины.

Уравнение движения шайбы в этом случае имеет вид

$$\vec{F}_{тр} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_1. \qquad (3.17.2)$$

Свяжем систему координат XOY с неподвижной осью диска (см. рис. 3.49, *а*). Спроецировав векторы, входящие в уравнение (3.17.2), на оси X и Y, получим:

$$F_{тр} = ma_1,$$

$$N = mg.$$

Так как $F_{тр} = \mu N$, то

$$\mu mg = m \cdot 4\pi^2 n_1^2 l. \qquad (3.17.3)$$

При частоте вращения n_2 длина пружины становится равной $2l$, и на шайбу будут уже действовать четыре силы (рис. 3.49, *б*): $\vec{F}_{упр}$, $\vec{F}_{тр}$, $m\vec{g}$ и $\vec{N}$.

Уравнение движения шайбы теперь имеет такой вид:

$$\vec{F}_{упр} + \vec{F}_{тр} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}_2,$$

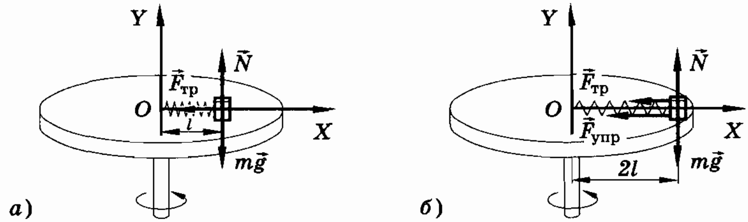


Рис. 3.49

а в проекциях на ось X:

$$F_{упр} + F_{тр} = ma_2, \qquad (3.17.4)$$

где $F_{упр} = kl$, $F_{тр} = \mu mg$ и $a_2 = 4\pi^2 n_2^2 \cdot 2l$.

Следовательно,

$$kl + \mu mg = 8\pi^2 n_2^2 lm. \qquad (3.17.5)$$

Из выражений (3.17.3) и (3.17.5) получим

$$k = 4\pi^2 m(2n_2^2 - n_1^2) = 1{,}8 \cdot 10^2 \text{ Н/м}.$$

Задача 5

Брусок массой M находится на гладкой горизонтальной поверхности, по которой он может двигаться без трения. На бруске лежит маленький кубик массой m (рис. 3.50, *а*). Коэффициент трения между кубиком и бруском равен μ. К кубику приложена горизонтальная сила $\vec{F}$. При каком минимальном значении F_{min} силы $\vec{F}$ начнется скольжение кубика по бруску? Через какое время кубик соскользнет с бруска? Длина бруска l.

Решение. Двигаясь в горизонтальном направлении, кубик увлекает за собой брусок, вследствие того что между ними есть трение. Максимальная сила, с которой кубик может действовать на брусок в направлении движения, равна максимальной силе трения покоя. Эта сила сообщает бруску ускорение $\vec{a}_2$.

На кубик действуют (рис. 3.50, *б*) сила тяжести $m\vec{g}$, сила тяги $\vec{F}$, сила реакции опоры $\vec{N}_1$ и максимальная сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$. Под действием этих сил кубик движется с ускорением $\vec{a}_1$. При $a_1 > a_2$ кубик начнет обгонять брусок, скользя по его поверхности, пока не упадет с него.

Уравнение движения кубика в проекциях на горизонтальную ось имеет вид

$$F - F_{тр} = ma_1. \qquad (3.17.6)$$

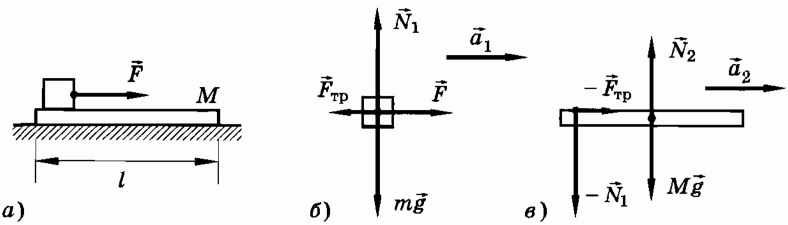


Рис. 3.50

Учитывая, что $F_{тр} = \mu N_1$ и $N_1 = mg$, будем иметь:

$$F - \mu mg = ma_1. \qquad (3.17.7)$$

К бруску приложены сила тяжести $M\vec{g}$ (рис. 3.50, *в*), сила реакции опоры $\vec{N}_2$, сила нормального давления $-\vec{N}_1$ и сила трения $-\vec{F}_{тр}$, действующая со стороны кубика в направлении движения и сообщающая бруску ускорение $\vec{a}_2$.

Уравнение движения бруска в проекциях на горизонтальную ось имеет вид

$$F_{тр} = Ma_2 \text{ или } \mu mg = Ma_2. \qquad (3.17.8)$$

Кубик скользит относительно бруска с ускорением $a = a_1 - a_2$. Из выражений (3.17.7) и (3.17.8) находим

$$a = \frac{F}{m} - \mu g\left(1 + \frac{m}{M}\right). \qquad (3.17.9)$$

Минимальное значение F_{min} силы $\vec{F}$ определяется из условия: $a = 0$. Тогда

$$F_{min} = \mu mg\left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Расстояние, равное длине бруска l, кубик проходит за время

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}}.$$

Следовательно,

$$t = \sqrt{\frac{2l}{\frac{F}{m} - \mu g\left(1 + \frac{m}{M}\right)}}.$$

Задача 6

На внутренней поверхности сферы радиусом R, вращающейся вокруг вертикальной оси, проходящей через центр сферы, с постоянной угловой скоростью ω, находится маленькая шайба (рис. 3.51). Считая угол α между осью вращения и радиусом O_1A, проведенным из центра сферы к шайбе, известным, найдите минимальное значение коэффициента трения, при котором шайба не соскользнет вниз.

Решение. На шайбу действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции со стороны сферы $\vec{N}$, направленная по радиусу к центру, и сила трения $\vec{F}_{тр}$, направленная по касательной к поверхности сферы и препятствующая скольжению шайбы вниз.

Шайба движется по окружности с центром в точке O_2, расположенной в горизонтальной плоскости. Радиус окружности

$$O_2A = R\sin\alpha.$$

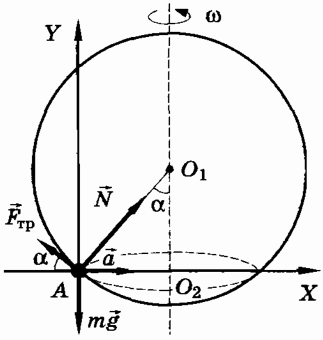


Рис. 3.51

Систему координат XOY свяжем с Землей. Ось X направим горизонтально так, чтобы в данный момент времени она совпадала с прямой AO_2, проходящей через шайбу, а ось Y — вертикально вверх.

При равномерном вращении сферы шайба имеет лишь нормальное (центростремительное) ускорение $a = \omega^2 r = \omega^2 R\sin\alpha$, направленное к точке O_2 по радиусу окружности AO_2.

По второму закону Ньютона

$$\vec{N} + \vec{F}_{тр} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Запишем это уравнение в проекциях на ось Y:

$$N\cos\alpha + F_{тр}\sin\alpha - mg = 0,$$

или

$$N\cos\alpha + \mu N\sin\alpha = mg.$$

Отсюда

$$N = \frac{mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

Уравнение движения шайбы в проекциях на ось X запишется так:

$$N\sin\alpha + \mu N\cos\alpha = m\omega^2 R\sin\alpha.$$

Учитывая найденное выражение для модуля силы $\vec{N}$, будем иметь

$$mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha = m\omega^2 R\sin\alpha\cos\alpha + \mu m\omega^2 R\sin^2\alpha.$$

Отсюда

$$\mu = \frac{(g - \omega^2 R\cos\alpha)\sin\alpha}{g\cos\alpha + \omega^2 R\sin^2\alpha}.$$

Если $\omega^2 R\cos\alpha \geqslant g$, то $\mu \leqslant 0$. Это значит, что при достаточно большой угловой скорости вращения сферы $\left(\omega = \sqrt{\frac{g}{R\cos\alpha}}\right)$ шайба не соскользнет вниз и при отсутствии трения между шайбой и внутренней поверхностью сферы.

Задача 7

Стеклянный шарик, радиус которого $r = 2{,}0$ мм, падает в растворе глицерина. Определите установившуюся скорость и начальное ускорение шарика. Плотности стекла и раствора глицерина равны соответственно $\rho = 2{,}53 \cdot 10^3$ кг/м^3 и $\rho_0 = 1{,}21 \cdot 10^3$ кг/м^3. Считать, что при движении шарика в растворе глицерина на него со стороны раствора действует сила сопротивления $F_c = 6\pi\eta r v$ (закон Стокса), где коэффициент $\eta = 5{,}02 \cdot 10^{-2}$ Па · с — вязкость раствора.

Решение. Уравнение движения шарика, падающего в растворе глицерина, в проекциях на вертикальную ось имеет вид

$$mg - F_A - F_c = ma, \qquad (3.17.10)$$

где $m = \frac{4\pi}{3}r^3\rho$ — масса шарика, $F_A = \frac{4\pi}{3}r^3\rho_0 g$ — архимедова сила, действующая на шарик со стороны раствора.

После подстановки в уравнение (3.17.10) значений входящих величин получим

$$\frac{4\pi}{3}r^3\rho g - \frac{4\pi}{3}r^3\rho_0 g - 6\pi\eta r v = \frac{4\pi}{3}r^3\rho a. \qquad (3.17.11)$$

Установившуюся скорость найдем из условия, что ускорение равно нулю:

$$v_у = \frac{2r^2 g(\rho - \rho_0)}{9\eta} \approx 0{,}23 \text{ м/с} = 23 \text{ см/с}.$$

Начальное ускорение получим из уравнения движения (3.17.11), полагая скорость равной нулю:

$$a_0 = \frac{(\rho - \rho_0)g}{\rho} \approx 5{,}1 \text{ м/с}^2.$$

Упражнение 8

1. Среднее расстояние между центрами Земли и Луны равно 60 земным радиусам, а масса Луны в 81 раз меньше массы Земли. В какой точке прямой, соединяющей их центры, следует поместить тело, чтобы оно притягивалось к Земле и Луне с одинаковыми силами?
2. На какой глубине h от поверхности Земли ускорение свободного падения $g_h = 9{,}7$ м/с^2? Радиус Земли $R_З = 6400$ км. Ускорение свободного падения на географических полюсах Земли $g_0 = 9{,}8$ м/с^2. Считать Землю однородным шаром.
3. Радиус Луны R_1 приблизительно в 3,7 раза меньше, чем радиус Земли R, а масса Луны m_1 в 81 раз меньше массы Земли m. Каково ускорение свободного падения тел на поверхности Луны?
4. Каково ускорение свободного падения на высоте, равной радиусу Земли?
5. Спутник движется вокруг Земли на расстоянии H от ее поверхности. Радиус Земли $R_0 >> H$. Определите период обращения спутника. Орбиту считать круговой.
6. Два тела одинаковой массы соединены невесомой пружиной, жесткость которой $k = 200$ Н/м. Тела находятся на абсолютно гладкой горизонтальной поверхности. К одному из тел приложена горизонтальная сила $\vec{F}$ ($F = 20$ Н). Определите удлинение Δl пружины.
7. Имеются две пружины, жесткости которых равны соответственно k_1 и k_2. Какова жесткость двух пружин, соединенных: а) параллельно; б) последовательно?
8. При помощи пружинного динамометра груз массой $m = 10$ кг движется с ускорением $a = 5$ м/с^2 по горизонтальной поверхности стола. Коэффициент трения груза о стол равен $\mu = 0{,}1$. Найдите удлинение Δl пружины, если ее жесткость $k = 2000$ Н/м.
9. На горизонтальной вращающейся платформе на расстоянии $R = 50$ см от оси вращения лежит груз. Коэффициент трения груза о платформу $\mu = 0{,}05$. При какой частоте вращения груз начнет скользить?
10. За какое время первоначально покоившееся тело соскользнет с наклонной плоскости высотой $h = 3{,}0$ м, наклоненной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, если при угле наклона плоскости к горизонту $\beta = 10°$ оно движется равномерно?
11. Тело массой $m = 20$ кг тянут с силой $F = 120$ Н по горизонтальной поверхности. Если эта сила приложена под углом $\alpha_1 = 60°$ к горизонту, тело движется равномерно. С каким ускорением будет двигаться тело, если ту же силу приложить под углом $\alpha_2 = 30°$ к горизонту?

12. Наклонная плоскость составляет с горизонтом угол $\alpha = 30°$. На плоскость положили тело и толкнули вверх. В течение времени $t_1 = 0{,}7$ с тело прошло расстояние $l = 1{,}4$ м, после чего начало соскальзывать вниз. Сколько времени длится соскальзывание до начального положения тела? Каков коэффициент трения тела о наклонную плоскость?

13. Цилиндрическая труба радиусом $R = 1$ м катится по горизонтальной поверхности так, что ее ось перемещается с ускорением $a = 4{,}9$ м/с^2. Внутри трубы находится маленький кубик, коэффициент трения скольжения которого о внутреннюю поверхность трубы $\mu = 0{,}5$. На какой высоте от горизонтальной поверхности, по которой катится труба, находится кубик? Толщиной стенок трубы пренебречь.

14. На гладком горизонтальном столе лежит брусок массой $m_1 = 2$ кг, на который положен второй брусок массой $m_2 = 1$ кг. Оба бруска соединены невесомой нитью, перекинутой через неподвижный блок (рис. 3.52). Какую силу $\vec{F}$ надо приложить к нижнему бруску в горизонтальном направлении, чтобы он начал двигаться с постоянным ускорением $a = \dfrac{g}{2}$? Коэффициент трения между брусками $\mu = 0{,}5$.

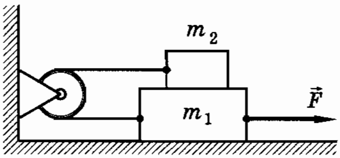


Рис. 3.52

15. Как будет изменяться сила трения между доской и находящимся на ней бруском, если доску приподнимать за один из ее концов так, чтобы угол наклона с горизонтом изменялся от 0 до 90°? Начертите график зависимости модуля силы трения от угла наклона доски. Коэффициент трения μ известен.

16. Два шара одинакового размера, но разных масс m_1 и m_2 ($m_1 > m_2$) связаны нитью, длина которой много больше их радиусов. При помещении в жидкость эта система шаров тонет. Какая сила натяжения будет действовать на соединяющую шары нить при их установившемся падении в жидкости?

Глава 4

НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА. СИЛЫ ИНЕРЦИИ

§ 4.1. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

Во второй главе было введено понятие инерциальной системы отсчета. Там же было показано, что законы Ньютона правильно описывают движение только в инерциальных системах отсчета. Как проверить, является ли данная система отсчета инерциальной?

Для этого достаточно рассмотреть в ней хотя бы простейший вид движения и выяснить, происходит ли оно в соответствии со вторым законом движения Ньютона.

Мы уже знаем (см. § 2.3), что систему координат, связанную с Землей, приближенно можно рассматривать как инерциальную.

Предположим, что мы сидим в вагоне поезда, который набирает скорость, т. е. движется с ускорением $\vec{a}_п$.

Представим себе, что перед нами горизонтальный столик, поверхность которого настолько гладкая, что предметы, например шашки или шахматные фигуры, могут скользить по нему без трения. В этом случае фигуры не остаются неподвижными относительно вагона, а движутся в сторону, противоположную ускорению движения поезда, с ускорением $\vec{a}_{от} = -\vec{a}_п$.

Попробуем описать это движение, используя второй закон Ньютона:

$$m\vec{a}_а = \vec{F}, \qquad (4.1.1)$$

где $\vec{F}$ — равнодействующая сил, приложенных к шашке или шахматной фигуре, а $\vec{a}_а$ — ускорение относительно Земли.

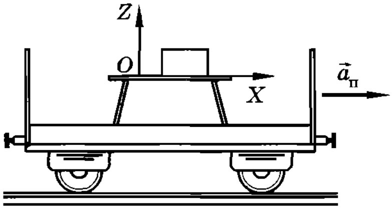


Рис. 4.1

Систему координат свяжем с вагоном.

Направим ось X в направлении движения поезда, а ось Z перпендикулярно поверхности стола (рис. 4.1). Рассмотрим силы, действующие на шашку.

Вдоль оси Z действуют две силы: сила притяжения к Земле и сила реакции со стороны стола. Они равны по модулю и направлены в противоположные стороны. Вследствие этого $F_z = 0$ и $a_{az} = 0$.

Вдоль оси X силы не действуют. Действительно, по условию сила трения равна нулю, а других сил нет.

В результате из уравнения (4.1.1) следует

$$F_x = 0,\ a_{ax} = 0,$$

т. е. тело должно двигаться равномерно и прямолинейно или покоиться.

Этот вывод, однако, противоречит тому, что мы видим, находясь в вагоне: шашка движется с ускорением относительно вагона.

Таким образом, если система координат связана с телом, которое само движется с ускорением (вагоном в рассмотренном случае), то первый и второй законы Ньютона в форме (4.1.1) не могут быть использованы для описания движения тел.

Системы отсчета, связанные с телами, которые сами движутся с ускорением по отношению к инерциальным системам, называют неинерциальными.

Как же надо изменить уравнение движения (4.1.1), чтобы его можно было использовать для описания движения в неинерциальных системах отсчета? Решение этой задачи позволит нам, в частности, ответить на вопрос о том, при каких условиях неинерциальную систему отсчета приближенно можно рассматривать как инерциальную.

В неинерциальных системах отсчета нельзя пользоваться для описания движения законами Ньютона.

§ 4.2. СИЛЫ ИНЕРЦИИ

Во многих случаях движение относительно неинерциальной системы отсчета выглядит наиболее просто. И в этих случаях, как правило, задачу удобнее решать в неинерциальных системах. Но для этого нужно ввести силы инерции. Что это такое?

Напомним основные положения механики. Во-первых, ускорение тела, согласно второму закону Ньютона, определяется силами. Во-вторых, согласно третьему закону, силы взаимодействия тел равны по модулю и противоположны по направлению. Сохранить оба эти положения при рассмотрении движения относительно неинерциальных систем невозможно.

Самым существенным является второй закон Ньютона. Это уравнение движения. Его-то и целесообразно сохранить, несколько видоизменив. Но тогда от третьего закона придется отказаться.

Для того чтобы второй закон Ньютона выполнялся и в неинерциальной системе отсчета, *наряду с обычными силами, которые действуют на данное тело со стороны других тел, введем так называемые силы инерции.* **Сила инерции — это сила, появление которой не обусловлено действием каких-либо определенных тел. Необходимость их введения вызвана только тем, что системы координат, относительно которых мы рассматриваем движение тел, являются неинерциальными,** т. е. имеют ускорение относительно Солнца и звезд. Соответственно третий закон Ньютона для сил инерции несправедлив. С одной стороны, силы инерции подобны обычным силам: вызывают ускорения тел. С другой стороны, они отличаются от обычных сил: не вызываются воздействием одного тела на другое.

Найдем теперь значение сил инерции. Ведь для того чтобы введение сил инерции имело практический смысл, мы должны уметь их вычислять. Будем обозначать ускорение тела относительно инерциальной системы отсчета через $\vec{a}_{\text{а}}$. Часто это ускорение называют абсолютным, а ускорение относительно неинерциальной системы отсчета называют относительным. Относительное ускорение обозначим $\vec{a}_{\text{от}}$. (Эти термины в значительной мере условны; просто надо как-то различать оба ускорения.) Тогда в инерциальной системе отсчета, как обычно,

$$m\vec{a}_{\text{а}} = \vec{F}. \qquad (4.2.1)$$

Здесь $\vec{F}$ — результирующая сил, действующих на тело со стороны других тел. Но в неинерциальной системе

$$m\vec{a}_{\text{от}} \neq \vec{F}, \qquad (4.2.2)$$

так как $\vec{a}_{\text{от}} \neq \vec{a}_{\text{а}}$.

Введем силы инерции $\vec{F}_{\text{и}}$ так: потребуем, чтобы в неинерциальной системе отсчета также выполнялся второй закон Ньютона, т. е. чтобы имело место равенство

$$m\vec{a}_{\text{от}} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{и}}. \qquad (4.2.3)$$

Здесь $\vec{F}_{\text{и}}$ — та дополнительная сила, которую нужно добавить к обычной силе $\vec{F}$, чтобы второй закон Ньютона выполнялся бы и в неинерциальной системе. Возможно ли это? Да, если *сила инерции* равна произведению массы тела m на разность относительного и абсолютного ускорений тела:

$$\vec{F}_{\text{и}} = m(\vec{a}_{\text{от}} - \vec{a}_{\text{а}}). \qquad (4.2.4)$$

Действительно, подставляя это выражение для силы инерции в уравнение (4.2.3), мы получим второй закон Ньютона в форме (4.2.1). Поэтому, введя силы инерции (4.2.4), мы получим правильное описание движения в неинерциальных системах.

Для вычисления силы инерции надо найти разность ускорений тела относительно неинерциальной и инерциальной систем отсчета. Нахождение $\vec{a}_{\text{от}} - \vec{a}_{\text{а}}$ является чисто кинематической задачей, и ее всегда можно решить, если известен характер движения неинерциальной системы относительно инерциальной.

Мы ограничимся знакомством с двумя простыми, но весьма важными практически видами движения неинерциальных систем отсчета.

Сила инерции равна произведению массы тела на разность его относительного и абсолютного ускорений.

§ 4.3. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА, ДВИЖУЩИЕСЯ ПРЯМОЛИНЕЙНО С ПОСТОЯННЫМ УСКОРЕНИЕМ

Самый простой случай неинерциальной системы — это система, все точки которой движутся с одинаковыми постоянными ускорениями.

Пусть система отсчета $X'O'Y'$ движется относительно инерциальной системы XOY с постоянным ускорением $\vec{a}_п$. Это ускорение иногда называют переносным. Если скорость тела относительно одной системы отсчета равна $\vec{v}_{от}$, а сама система отсчета движется прямолинейно относительно другой системы отсчета со скоростью $\vec{v}_п$, то скорость тела относительно этой другой системы (согласно закону сложения скоростей Галилея) равна:

$$\vec{v}_а = \vec{v}_{от} + \vec{v}_п. \qquad (4.3.1)$$

Такая связь, как следует из определения ускорения, будет и между ускорениями:

$$\vec{a}_а = \vec{a}_{от} + \vec{a}_п. \qquad (4.3.2)$$

Следовательно,

$$\vec{a}_{от} - \vec{a}_а = -\vec{a}_п \qquad (4.3.3)$$

и, согласно (4.2.4), сила инерции равна

$$\vec{F}_и = -m\vec{a}_п. \qquad (4.3.4)$$

Итак, если неинерциальная система имеет ускорение $\vec{a}_п = \text{const}$, то в ней наряду с обычными силами действуют силы инерции, определяемые выражением (4.3.4).

Теперь на простом примере познакомимся с отличием описания движения в неинерциальной системе отсчета от описания того же движения относительно инерциальной системы. Пусть тележка, на которой установлен подвес с маятником (рис. 4.2, *а*), движется с постоянным ускорением $\vec{a}_п$. При движении маятник отклонится от вертикали и после затухания возникших колебаний «замрет» в отклоненном положении (рис. 4.2, *б*). Нить подвеса будет образовывать угол α с вертикалью. Рассмотрим установившееся движение, когда колебаний маятника нет. На левой половине страницы будет дано описание движения в инерциальной системе отсчета (относительно Земли, которую в данном случае можно считать инерциальной системой), а на правой — в неинерциальной системе (относительно тележки).

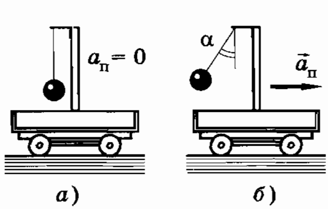


Рис. 4.2

Инерциальная система отсчета

1. Маятник движется с ускорением $\vec{a}_а = \vec{a}_п$, так как относительно тележки он покоится, а тележка имеет ускорение $\vec{a}_п$.

2. На маятник действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Они сообщают маятнику ускорение $\vec{a}_п$, направленное горизонтально. Второй закон Ньютона

$$m\vec{a}_п = m\vec{a}_а = m\vec{g} + \vec{T} \quad (1а)$$

справедлив. Как видно из рисунка 4.3,

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{ma_п}{mg} = \frac{a_п}{g}.$$

3. Силы $m\vec{g}$ и $\vec{T}$ обусловлены действием других тел: $m\vec{g}$ — притяжением к Земле, а $\vec{T}$ — упругостью нити подвеса. Третий закон Ньютона справедлив: маятник притягивает Землю и растягивает нить.

Неинерциальная система отсчета

1. Относительно тележки маятник неподвижен: $a_{от} = 0$.

2. На маятник действуют те же силы $m\vec{g}$ и $\vec{T}$. Но эти силы не сообщают маятнику ускорения. Второй закон Ньютона непосредственно несправедлив. Чтобы он выполнялся, необходимо добавить еще силу инерции $\vec{F}_и = -m\vec{a}_п$. Тогда

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_и = 0. \quad (1б)$$

Сумма сил равна нулю и $a_{от} = 0$. Второй закон теперь выполняется. Причем по-прежнему $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a_п}{g}$ (рис. 4.4).

3. Сила $\vec{F}_и$ не вызвана действием какого-либо определенного тела. Третий закон Ньютона для этой силы не имеет места. Силы же $m\vec{g}$ и $\vec{T}$ по-прежнему обусловлены действием других тел.

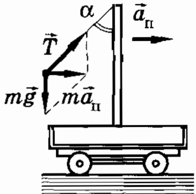


Рис. 4.3

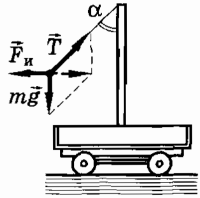


Рис. 4.4

Примером неинерциальной системы отсчета может служить система отсчета, связанная с лифтом при его замедленном или ускоренном движении. Если ускорение лифта направлено вверх, то наряду с силой тяжести $m\vec{g}$ на все тела в лифте будет действовать сила инерции $m\vec{a}_п$, направленная вниз. Это эквивалентно увеличению веса: вес будет равен $m(g + a_п)$ вместо mg. Если ускорение лифта направлено вниз, то это эквивалентно уменьшению веса, который теперь равен $m(g - a_п)$ вместо mg. Эти изменения в весе непосредственно можно ощущать, находясь в лифте.

При движении системы отсчета с постоянным ускорением сила инерции равна взятому со знаком «минус» произведению массы на ускорение системы.

§ 4.4. ВРАЩАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА. ЦЕНТРОБЕЖНАЯ СИЛА ИНЕРЦИИ

Рассмотрим еще один часто встречающийся пример неинерциальной системы отсчета; пусть система отсчета вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси.

Ограничимся простым случаем, когда тело покоится относительно вращающейся системы. Тогда

$$v_{от} = 0 \text{ и } a_{от} = 0. \tag{4.4.1}$$

Условия (4.4.1) упрощают решение задачи.

Если тело находится на расстоянии R от оси вращения, то относительно инерциальной системы оно имеет ускорение

$$\vec{a}_а = -\omega^2\vec{R}. \tag{4.4.2}$$

Знак минус появляется из-за того, что радиус-вектор $\vec{R}$ направлен от центра, а ускорение тела — к центру. Переносное ускорение в данном случае равно абсолютному ($\vec{a}_п = \vec{a}_а$), так как относительное ускорение отсутствует.

В инерциальной системе отсчета кубик, лежащий, например, на диске проигрывателя, имеет ускорение, определяемое выражением (4.4.2). Это ускорение сообщает ему сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$, направленная к оси вращения. В неинерциальной

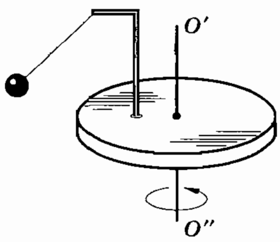


Рис. 4.5

системе отсчета, связанной с вращающимся диском, на кубик действует та же сила трения $\vec{F}_{тр}$, но кубик покоится относительно этой системы. Чтобы объяснить (точнее, описать) этот факт, вводят силу инерции, направленную от оси вращения, которая и уравновешивает силу трения.

Используя определение силы инерции (4.2.4) и учитывая условие $a_{от} = 0$, получим следующее выражение для силы инерции, действующей на тело, которое покоится во вращающейся системе отсчета:

$$\vec{F}_и = m(\vec{a}_{от} - \vec{a}_а) = m\omega^2\vec{R}. \qquad (4.4.3)$$

Эта сила инерции направлена от оси вращения и поэтому называется центробежной силой инерции. Она различна в различных точках вращающейся системы.

Теперь на простом примере сравним описание движения в инерциальной и неинерциальной системах отсчета.

На вращающейся с постоянной угловой скоростью платформе на нити к стойке подвешен шарик массой m (рис. 4.5). Длина нити l, расстояние точки подвеса маятника от оси вращения равно r. При вращении платформы нить отклоняется от вертикали на некоторый угол α. Найдем угловую скорость платформы, если шарик не колеблется, т. е. неподвижен относительно платформы. По-прежнему на левой половине страницы движение будем рассматривать относительно инерциальной системы, а на правой — относительно неинерциальной (вращающейся платформы).

Инерциальная система отсчета	**Вращающаяся (неинерциальная) система отсчета**
1. Шарик движется по окружности с постоянным по модулю ускорением $a_а = a_п = \omega^2 R$, где $R = r + l\sin\alpha$ — расстояние от центра шарика до оси вращения.	1. Шарик неподвижен: $a_{от} = 0$.

2. На шарик действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Они сообщают шарику необходимое для движения по окружности центростремительное ускорение. Второй закон Ньютона

$$m\vec{a}_а = m\vec{g} + \vec{T} \qquad (1а)$$

справедлив.

Как видно из рисунка 4.6,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{ma_а}{mg} =$$

$$= \frac{\omega^2 R}{g} = \frac{\omega^2(r + l\sin\alpha)}{g}.$$

Отсюда

$$\omega = \sqrt{\frac{g\operatorname{tg}\alpha}{r + l\sin\alpha}}.$$

3. Третий закон Ньютона выполняется: шарик притягивает Землю с силой $-m\vec{g}$ и растягивает нить с силой $-\vec{T}$.

2. На шарик и в данной системе отсчета действуют силы $m\vec{g}$ и $\vec{T}$. Но эти силы не сообщают шарику ускорения. Второй закон Ньютона непосредственно несправедлив. Чтобы он выполнялся, нужно добавить еще силу инерции:

$$\vec{F}_и = -m\vec{a}_п = -m\vec{a}_а = m\omega^2\vec{R}.$$

Тогда

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F}_и = 0, \qquad (1б)$$

т. е. сумма всех сил равна нулю (рис. 4.7).

Второй закон Ньютона теперь выполняется.

По-прежнему выполняется равенство

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\omega^2 R}{g}.$$

3. Третий закон Ньютона выполняется для сил $m\vec{g}$ и $\vec{T}$, но не выполняется для силы $\vec{F}_и$. Сила $\vec{F}_и$ не вызвана действием какого-либо тела.

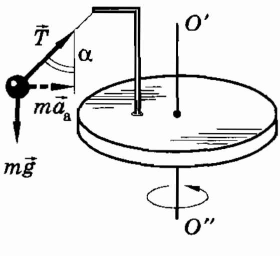


Рис. 4.6

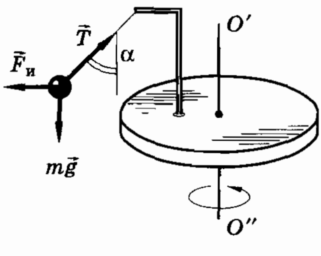


Рис. 4.7

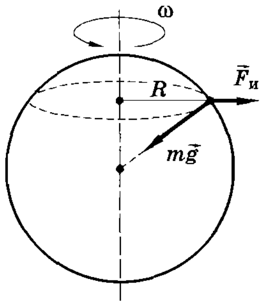


Рис. 4.8

При решении многих задач удобнее описывать движение относительно вращающейся системы отсчета, введя центробежную силу инерции.

Из-за вращения Земли геоцентрическая система отсчета не является инерциальной. Если рассматривать механические процессы в этой системе, то нужно вводить для всех точек поверхности Земли, кроме полюсов, центробежную силу инерции, равную

$$\vec{F}_и = m\omega^2\vec{R}, \qquad (4.4.4)$$

где R — расстояние от поверхности Земли до оси вращения, а ω — угловая скорость вращения Земли вокруг оси (рис. 4.8). Эта сила перпендикулярна оси вращения и составляет с силой притяжения к Земле некоторый угол, зависящий от географической широты места. Только на экваторе она перпендикулярна поверхности Земли. Действие силы инерции приводит к тому, что всюду, кроме полюсов, вес тела несколько меньше силы тяжести.

Отношение силы инерции к силе притяжения к Земле равно:

$$\frac{F_и}{mg} = \frac{\omega^2 R}{g}. \qquad (4.4.5)$$

Максимальное значение это отношение имеет на экваторе, но и там оно невелико:

$$\left(\frac{F_и}{mg}\right)_{max} = \frac{\omega^2 R}{g} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{R}{g} \approx 0{,}004, \text{ или } 0{,}4\%.$$

Более сложные силы инерции (силы Кориолиса), возникающие во вращающейся системе отсчета при движении тела относительно этой системы отсчета, мы рассматривать не будем.

С помощью центробежных сил инерции проще всего, например, объяснить работу ультрацентрифуги. Этот аппарат предназначен для разделения высокомолекулярных соединений: белков, нуклеиновых кислот и др., растворенных в жидкости.

Ротор центрифуги с закрепленными в нем пробирками с раствором приводится в очень быстрое вращение (до $6{,}5 \cdot 10^4$ об/мин). При этом на молекулы растворенного вещества, плотность которого больше плотности жидкости, начинают действовать мощные центробежные силы инерции (если рассматривать процесс во вращающейся системе отсчета). Эти силы отделяют молекулы от остальной жидкости, на которую действуют меньшие силы. Высокомолекулярные соединения «тонут» в поле центробежных сил.

При расстоянии от оси вращения 10 см ускорение

$$a_а = \omega^2 R = (2\pi)^2 \left(\frac{65\,000}{60}\,\frac{рад}{с}\right)^2 \cdot 0{,}1\ м \approx 5 \cdot 10^6\ \frac{м}{с^2}.$$

Это ускорение в 500 000 раз больше ускорения свободного падения. Центрифуги с несколько меньшей скоростью вращения используются для разделения изотопов химических элементов, в частности изотопов урана.

На все тела на поверхности Земли действует центробежная сила инерции. Эта сила пропорциональна произведению квадрата угловой скорости на радиус окружности, вдоль которой движется тело.

§ 4.5. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

При решении задач с использованием неинерциальных систем отсчета применяются те же правила, что и при решении задач на динамику в инерциальных системах отсчета. Появляются лишь дополнительные силы — силы инерции. Если инерциальная система движется с постоянным ускорением $\vec{a}_п$, то сила инерции $\vec{F}_и = -m\vec{a}_п$. Во вращающейся системе координат центробежная сила инерции $\vec{F}_и = m\omega^2\vec{R}$, если тело (материальная точка) находится на расстоянии R от оси вращения и покоится относительно данной неинерциальной системы отсчета.

Нужно иметь в виду, что любую задачу можно решить, используя инерциальную систему отсчета. Использование неинерциальных систем отсчета диктуется соображениями простоты и удобства решения задач в этих системах.

Задача 1

К потолку лифта, поднимающегося с ускорением $a = 1{,}2$ м/с^2, направленным вверх, прикреплен динамометр. К динамометру подвешен блок, свободно вращающийся вокруг горизонтальной оси. Через блок перекинута нить, к концам которой прикреплены грузы массами $m_1 = 200$ г и $m_2 = 300$ г. Определите показания динамометра. Массой нити и блока пренебречь.

Решение. Будем рассматривать движение относительно неинерциальной системы, связанной с лифтом. Вертикальную ось Y направим вверх (рис. 4.9). Действующие на грузы силы изображены на этом рисунке. Кроме сил тяжести $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$ и сил натяжения нитей $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, действуют силы инерции $\vec{F}_{и1} = -m_1\vec{a}$ и $\vec{F}_{и2} = -m_2\vec{a}$.

Так как нить и блок невесомые, то $T_1 = T_2 = T$ и на блок со стороны нити действует сила, равная $2T$, направленная вниз. Сила, действующая на блок со стороны динамометра, уравновешивает эту силу, поэтому показания динамометра равны $2T$.

Запишем уравнения движения грузов:

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{F}_{и1},$$
$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{F}_{и2}. \qquad (4.5.1)$$

Здесь $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ — ускорения грузов относительно лифта. Очевидно, что ускорение $\vec{a}_1$ направлено вверх, а ускорение $\vec{a}_2$ направлено вниз, так как $m_2 > m_1$. Модули ускорений равны: $a_1 = a_2 = a_{от}$. При положительном направлении оси Y вверх $a_{1y} = a_{от}$, $a_{2y} = -a_{от}$, $g_y = -g$, $T_{1y} = T$ и $T_{2y} = T$. Уравнения (4.5.1) для модулей перепишутся так:

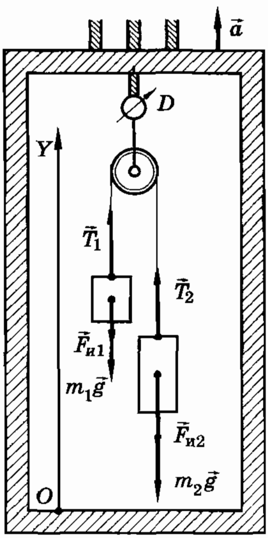


Рис. 4.9

$$m_1 a_{от} = -m_1 g + T - m_1 a,$$
$$-m_2 a_{от} = -m_2 g + T - m_2 a. \qquad (4.5.2)$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}(g + a).$$

Показания динамометра

$$2T = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}(g + a) = 5{,}3 \text{ Н}.$$

Задача 2

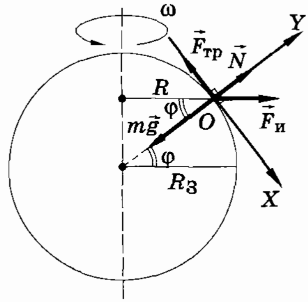


Рис. 4.10

На поверхности Земли на широте φ лежит груз массой m (рис. 4.10). Радиус Земли $R_З$. Найдите силу нормального давления груза на Землю (вес груза) и силу трения покоя. Угловая скорость вращения Земли ω.

Решение. В системе отсчета, связанной с Землей, на груз действуют три обычные силы: сила притяжения к Земле, сила реакции опоры $\vec{N}$ (она равна по модулю и противоположна по направлению силе нормального давления на Землю, т. е. весу тела) и сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$ (эта сила препятствует скольжению груза от полюса к экватору). Кроме того, действует центробежная сила инерции $\vec{F}_и = m\omega^2\vec{R}$, где $R = R_З\cos\varphi$ — радиус окружности, по которой движется груз вместе с Землей относительно инерциальной системы отсчета. Все силы изображены на рисунке 4.10.

Начало системы координат, связанной с Землей, совместим с центром тела; ось Y направим перпендикулярно поверхности Земли, а ось X — по касательной к поверхности.

Тело находится относительно Земли в покое. Поэтому сумма всех сил, действующих на него, равна нулю:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + \vec{F}_и = 0.$$

В проекциях на оси Y и X это уравнение запишется так:

$$-mg + N + m\omega^2R_З\cos^2\varphi = 0,$$

$$-F_{тр} + m\omega^2R_З\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

Отсюда

$$N = mg - m\omega^2R_З\cos^2\varphi,$$

$$F_{тр} = m\omega^2R_З\sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}m\omega^2R_З\sin 2\varphi.$$

Вес тела

$$P = N = mg - m\omega^2R_З\cos^2\varphi.$$

Из этих формул видно, что на полюсах Земли ($\varphi = 90°$) $P = mg$. Это означает, что вес тела и сила тяжести равны по модулю. Сила трения на полюсе равна нулю. На экваторе ($\varphi = 0°$) $P = mg - m\omega^2R_З$, т. е. вес меньше силы тяжести. Сила трения и на экваторе равна нулю. Максимальное значение сила трения имеет при $\varphi = \pm 45°$, когда $\sin 2\varphi = 1$.

Задача 3

Тело находится в покое на вершине наклонной плоскости (рис. 4.11). За какое время тело соскользнет с плоскости, если плоскость в момент времени $t_0 = 0$ начнет двигаться влево в горизонтальном направлении с ускорением $a = 1$ м/с^2? Длина плоскости $l = 1$ м, угол наклона к горизонту $\alpha = 30°$, коэффициент трения между телом и плоскостью $\mu = 0,6$.

Решение. Координатные оси системы отсчета, связанной с плоскостью, направим вдоль плоскости и перпендикулярно ей (см. рис. 4.11). В этой системе отсчета, кроме силы тяжести $m\vec{g}$, силы реакции опоры $\vec{N}$ и силы трения $\vec{F}_{тр}$, действует сила инерции $\vec{F}_и$.

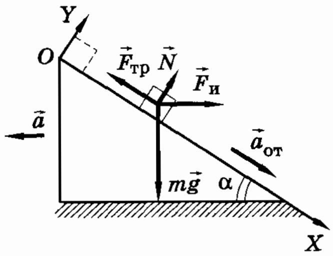


Рис. 4.11

Искомое время определится по формуле пути при равноускоренном движении без начальной скорости:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a_{от}}}.$$

Здесь $a_{от}$ — модуль ускорения тела относительно плоскости. Второй закон Ньютона в неинерциальной системе отсчета, связанной с плоскостью, запишется так:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + \vec{F}_и = m\vec{a}_{от},$$

где

$$\vec{F}_и = -m\vec{a}.$$

Уравнения для модулей проекций на оси координат X и Y имеют вид

$$N - mg\cos\alpha + ma\sin\alpha = 0,$$
$$mg\sin\alpha - F_{тр} + ma\cos\alpha = ma_{от}.$$

Учитывая, что $F_{тр} = \mu N$, из этой системы уравнений найдем ускорение $a_{от}$:

$$a_{от} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + a(\cos\alpha + \mu\sin\alpha).$$

Следовательно,

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a_{от}}} = \sqrt{2l\{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) + a(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)\}^{-1}} \approx 0{,}8\ \text{с}.$$

Упражнение 9

1. Через блок перекинута нить, к концам которой подвешены грузы массами $m_1 = 1{,}5$ кг и $m_2 = 0{,}5$ кг (рис. 4.12). Ось блока движется с ускорением $a = 4$ м/с^2, направленным вниз. Найдите ускорения грузов относительно Земли.
2. В вагоне поезда, идущего со скоростью $v = 72$ км/ч по закруглению радиусом $R = 400$ м, производится взвешивание тела на пружинных весах. Определите показания весов, если масса тела $m = 100$ кг.
3. На экваторе планеты тела весят вдвое меньше, чем на полюсе. Определите период T вращения планеты вокруг своей оси, рассматривая ее как однородный шар со средней плотностью вещества $\rho = 3000$ кг/м^3.
4. Металлическая цепочка длиной $l = 0{,}5$ м, концы которой соединены, насажена на деревянный диск (рис. 4.13). Диск вращается с частотой $n = 60$ об/с. Масса цепочки $m = 40$ г. Определите силу натяжения T цепочки.
5. Наклонная плоскость (рис. 4.14) с углом наклона α движется влево с ускорением $\vec{a}$. При каком значении ускорения тело, лежащее на наклонной плоскости, начнет подниматься вдоль плоскости? Коэффициент трения между телом и плоскостью равен μ.
6. Гладкая наклонная плоскость, образующая с горизонтом угол α (рис. 4.15), движется вправо с ускорением $\vec{a}$. На плоскости лежит брусок массой m, удерживаемый нитью AB. Найдите силу натяжения T нити и силу давления P бруска на плоскость.

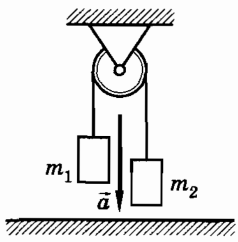


Рис. 4.12

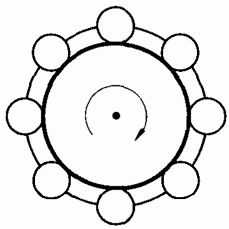


Рис. 4.13

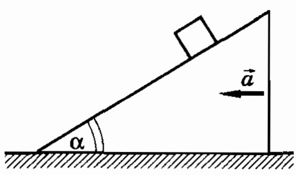


Рис. 4.14

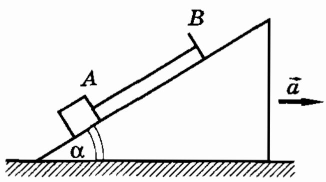


Рис. 4.15

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

Глава 5

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

§ 5.1. ЗНАЧЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Какую бы систему взаимодействующих тел мы ни рассматривали, будь то Солнечная система или сталкивающиеся бильярдные шары, у тел системы с течением времени непрерывно изменяются координаты и скорости. В этом, разумеется, нет ничего неожиданного. Замечательным является то, что в системе тел, на которую не действуют внешние силы (такую систему называют замкнутой), имеется ряд величин, зависящих от координат и скоростей (но не ускорений) всех тел системы, которые при движении тел не изменяются со временем. К таким сохраняющимся величинам относится импульс (или количество движения), энергия и момент импульса (момент количества движения). Все они, как говорят, подчиняются соответствующим законам сохранения.

Мы рассмотрим подробно два закона сохранения: закон сохранения импульса и закон сохранения энергии. С законом сохранения момента импульса познакомимся на простых частных примерах.

Роль законов сохранения

Значение законов сохранения в механике и в физике вообще огромно. Эти законы позволяют сравнительно простым путем, без рассмотрения действующих на тела сил и без прослеживания движения тел системы решать ряд практически важных задач, что мы увидим в дальнейшем.

Кроме того, и это самое главное, открытые в механике законы сохранения импульса, энергии и момента импульса играют во всей физике огромную роль, далеко выходящую за рамки самой механики. Даже в тех условиях, когда законы механики Ньютона применять нельзя (например, для движения электронов в атоме), законы сохранения механических величин не теряют своего значения. Они применимы как к телам обычных размеров, так и к космическим телам и элементарным частицам.

Именно всеобщность законов сохранения, их применимость ко всем явлениям природы, а не только к механическим, делают эти законы очень важными.

Законы сохранения незаменимы, когда исследователи начинают проникать во вновь открытую сферу неизвестного. Так было при зарождении физики элементарных частиц. Сущность явлений лежала пока во тьме, были известны только отдельные факты. В этих условиях законы сохранения служили единственной надежной путеводной нитью для исследователей. Не зная еще сущности явлений в новой области, ученые с полным правом могли утверждать, что и здесь законы сохранения известных нам величин имеют место. Эта вера в надежность основных законов сохранения никогда еще не подводила исследователей и часто дарила им замечательные открытия. Так, открытие новой элементарной частицы — нейтрино обязано закону сохранения энергии.

Связь законов сохранения со свойствами пространства и времени

Особенно отчетливо значение законов сохранения механических величин выяснилось после того, как в XX в. была установлена связь этих законов со свойствами пространства и времени.

Закон сохранения импульса связан с однородностью пространства, с тем, что все точки пространства совершенно равноправны. Перенос (сдвиг) в пространстве какой-либо механической системы никак не влияет на процессы внутри нее. Доказательство того, что из однородности пространства следует закон сохранения импульса, слишком сложно, и мы на нем не можем остановиться.

Закон сохранения энергии связан с однородностью времени, с тем, что все моменты времени равноправны и мы можем любой момент взять за начало отсчета времени. Доказательство связи закона сохранения энергии с однородностью времени также сложно. Ограничимся одним примером. Если бы сила притяжения тел к Земле изменялась со временем (т. е. не все моменты времени были бы равноценны) периодически, то энергия не сохранялась. Мы могли бы поднимать тела вверх в момент ослабления притяжения к Земле, совершая некоторую работу, и опускать их вниз в моменты увеличения силы притяжения. Выигрыш в работе был бы налицо.

Закон сохранения момента импульса связан с изотропностью пространства, с тем, что его свойства одинаковы по всем направлениям.

§ 5.2. ИМПУЛЬС МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ДРУГАЯ ФОРМУЛИРОВКА ВТОРОГО ЗАКОНА НЬЮТОНА

Введем новую физическую величину — импульс материальной точки. Дадим другую формулировку второго закона Ньютона.

Импульс материальной точки

Второй закон Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}$ можно записать в иной форме, которая приведена самим Ньютоном в его главном труде «Математические начала натуральной философии».

Если на тело (материальную точку) действует постоянная сила, то постоянным является и ускорение

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t},$$

где $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ — начальное и конечное значения скорости тела.

Подставив это значение ускорения во второй закон Ньютона, получим:

$$\frac{m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{\Delta t} = \vec{F},$$

или

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{F}\Delta t. \qquad (5.2.1)$$

В этом уравнении появляется новая физическая величина — импульс материальной точки.

Импульсом материальной точки называют величину, равную произведению массы точки на ее скорость.

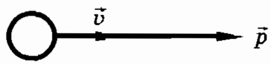


Рис. 5.1

Обозначим импульс (его также называют иногда количеством движения) буквой $\vec{p}$. Тогда

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}.} \qquad (5.2.2)$$

Из формулы (5.2.2) видно, что импульс — векторная величина. Так как $m > 0$, то импульс имеет то же направление, что и скорость (рис. 5.1).

Единица импульса не имеет особого названия. Ее наименование получается из определения этой величины:

$$\text{единица импульса в СИ} = 1\ \text{кг} \cdot 1\frac{\text{м}}{\text{с}} = 1\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Другая форма записи второго закона Ньютона

Обозначим через $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$ импульс материальной точки в начальный момент интервала Δt, а через $\vec{p}_2 = m\vec{v}_2$ — импульс в конечный момент этого интервала. Тогда $\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p}$ есть изменение импульса за время Δt. Теперь уравнение (5.2.1) можно записать так:

$$\boxed{\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t.} \qquad (5.2.3)$$

Так как $\Delta t > 0$, то направления векторов $\Delta\vec{p}$ и $\vec{F}$ совпадают. Согласно формуле (5.2.3) **изменение импульса материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет такое же направление, как и сила.**

Именно так был впервые сформулирован второй закон Ньютона.

Произведение силы на время ее действия называют иногда *импульсом силы*. (Не надо путать импульс $m\vec{v}$ материальной точки и импульс силы $\vec{F}\Delta t$. Это совершенно разные понятия.)

Уравнение (5.2.3) показывает, что одинаковые изменения импульса материальной точки могут быть получены в результате действия большой силы в течение малого интервала времени или малой силы за большой интервал времени. Когда вы прыгаете с

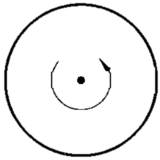


Рис. 5.2

какой-то высоты, то остановка вашего тела происходит за счет действия силы со стороны земли или пола. Чем меньше продолжительность столкновения, тем больше тормозящая сила. Для уменьшения этой силы надо, чтобы торможение происходило постепенно. Вот почему при прыжках в высоту спортсмены приземляются на мягкие маты. Прогибаясь, они постепенно тормозят спортсмена.

Формула (5.2.3) может быть обобщена и на тот случай, когда сила меняется во времени. Для этого весь промежуток времени Δt действия силы надо разделить на столь малые интервалы Δt_i, чтобы на каждом из них значение силы без большой ошибки можно было считать постоянным. Для каждого малого интервала времени справедлива формула (5.2.3). Суммируя изменения импульсов за малые интервалы времени, получим[1]:

$$\Delta\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \Delta t_i. \qquad (5.2.4)$$

Импульс системы материальных точек

Импульс системы материальных точек равен векторной сумме импульсов всех точек.

Для нахождения импульса тела поступают так: мысленно разбивают тело на отдельные элементы (материальные точки), находят импульсы полученных элементов, а потом их суммируют как векторы. Импульс тела равен сумме импульсов его отдельных элементов.

Мы познакомились с новой физической величиной — импульсом $\vec{p} = m\vec{v}$. Это позволило записать второй закон Ньютона в форме $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$.

? 1. Две материальные точки равной массы движутся навстречу друг другу с равными по модулю скоростями. Чему равен импульс системы точек?

2. Чему равен импульс однородного диска, вращающегося вокруг неподвижной оси (рис. 5.2)?

---

[1] Символ Σ (греческая буква «сигма») означает «сумма». Индексы $i = 1$ (внизу) и N (наверху) означают, что суммируется N слагаемых.

§ 5.3. ИЗМЕНЕНИЕ ИМПУЛЬСА СИСТЕМЫ ТЕЛ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

При рассмотрении любой механической задачи мы интересуемся движением определенного числа тел. Совокупность тел, движение которой мы изучаем, называется механической системой или просто системой. Как изменяется импульс системы тел?

Изменение импульса системы тел

Рассмотрим систему, состоящую из трех тел. Это могут быть три звезды, испытывающие воздействие со стороны соседних космических тел. На тела системы действуют внешние силы $\vec{F}_i$ (i — номер тела; например, $\vec{F}_2$ — это сумма внешних сил, действующих на тело номер два). Между телами действуют силы $\vec{F}_{ik}$, называемые внутренними силами (рис. 5.3). Здесь первая буква i в индексе означает номер тела, на которое действует сила $\vec{F}_{ik}$, а вторая буква k означает номер тела, со стороны которого действует данная сила. На основании третьего закона Ньютона

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}. \qquad (5.3.1)$$

Вследствие действия сил на тела системы их импульсы изменяются. Если за малый промежуток времени сила заметно не меняется, то для каждого тела системы можно записать изменение импульса в форме уравнения (5.2.3):

$$\begin{aligned} \Delta(m_1\vec{v}_1) &= (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_1)\Delta t, \\ \Delta(m_2\vec{v}_2) &= (\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_2)\Delta t, \\ \Delta(m_3\vec{v}_3) &= (\vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_3)\Delta t. \end{aligned} \qquad (5.3.2)$$

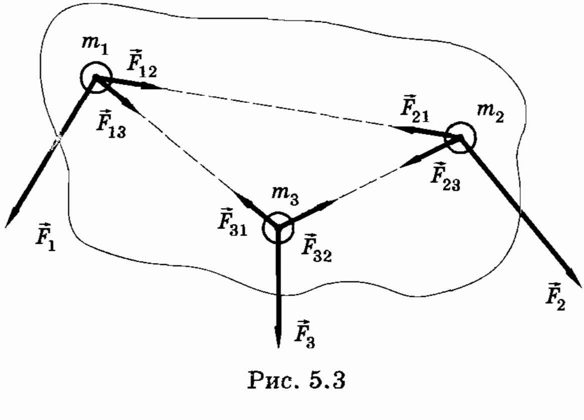


Рис. 5.3

Здесь в левой части каждого уравнения стоит изменение импульса тела $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$ за малое время Δt.

Более подробно: $\Delta(m_i\vec{v}_i) = m_i\vec{v}_{i\text{к}} - m_i\vec{v}_{i\text{н}}$, где $\vec{v}_{i\text{н}}$ — скорость в начале, а $\vec{v}_{i\text{к}}$ — в конце интервала времени Δt.

Сложим левые и правые части уравнений (5.3.2) и покажем, что сумма изменений импульсов отдельных тел равна изменению суммарного импульса всех тел системы, равного

$$\vec{p}_\text{с} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3. \tag{5.3.3}$$

Действительно,

$$\begin{gathered}\Delta(m_1\vec{v}_1) + \Delta(m_2\vec{v}_2) + \Delta(m_3\vec{v}_3) = \\ = m_1\vec{v}_{1\text{к}} - m_1\vec{v}_{1\text{н}} + m_2\vec{v}_{2\text{к}} - m_2\vec{v}_{2\text{н}} + m_3\vec{v}_{3\text{к}} - m_3\vec{v}_{3\text{н}} = \\ = (m_1\vec{v}_{1\text{к}} + m_2\vec{v}_{2\text{к}} + m_3\vec{v}_{3\text{к}}) - (m_1\vec{v}_{1\text{н}} + m_2\vec{v}_{2\text{н}} + m_3\vec{v}_{3\text{н}}) = \\ = \vec{p}_{\text{с.к}} - \vec{p}_{\text{с.н}} = \Delta\vec{p}_\text{с}.\end{gathered}$$

Таким образом,

$$\Delta\vec{p}_\text{с} = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3)\Delta t. \tag{5.3.4}$$

Но силы взаимодействия любой пары тел в сумме дают нуль, так как согласно формуле (5.3.1)

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21},\ \vec{F}_{13} = -\vec{F}_{31},\ \vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32}.$$

Поэтому изменение импульса системы тел $\Delta\vec{p}_\text{с}$ равно импульсу внешних сил:

$$\Delta\vec{p}_\text{с} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3)\Delta t. \tag{5.3.5}$$

Мы пришли к важному выводу: ***импульс системы тел могут изменить только внешние силы, причем изменение импульса системы пропорционально сумме внешних сил и совпадает с ней по направлению. Внутренние силы, изменяя импульсы отдельных тел системы, не изменяют суммарный импульс системы.***

Уравнение (5.3.5) справедливо для любого интервала времени, если сумма внешних сил остается постоянной.

Закон сохранения импульса

Из уравнения (5.3.5) вытекает чрезвычайно важное следствие. Если сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то равно нулю и изменение импульса системы: $\Delta\vec{p}_\text{с} = 0$. Это означает, что, какой бы интервал времени мы ни взяли, суммарный импульс в начале этого интервала $\vec{p}_{\text{с.н}}$ и в его конце

$\vec{p}_{\text{с.к}}$ один и тот же: $\vec{p}_{\text{с.н}} = \vec{p}_{\text{с.к}}$. Импульс системы остается неизменным, или, как говорят, сохраняется:

$$\boxed{\vec{p}_{\text{с}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 = \text{const}.} \qquad (5.3.6)$$

Закон сохранения импульса формулируется так: **если сумма внешних сил, действующих на тела системы, равна нулю, то импульс системы сохраняется.** Тела могут только обмениваться импульсами, суммарное же значение импульса не изменяется. Надо только помнить, что сохраняется векторная сумма импульсов, а не сумма их модулей.

Как видно из проделанного нами вывода, закон сохранения импульса является следствием второго и третьего законов Ньютона. Система тел, на которую не действуют внешние силы, называется *замкнутой* или *изолированной*. В замкнутой системе тел импульс сохраняется. Но область применения закона сохранения импульса шире: если даже на тела системы действуют внешние силы, но их сумма равна нулю, импульс системы все равно сохраняется.

Полученный результат легко обобщается на случай системы, содержащей произвольное число N тел:

$$\begin{aligned} &m_1\vec{v}_{1\text{н}} + m_2\vec{v}_{2\text{н}} + m_3\vec{v}_{3\text{н}} + \ldots + m_N\vec{v}_{N\text{н}} = \\ &= m_1\vec{v}_{1\text{к}} + m_2\vec{v}_{2\text{к}} + m_3\vec{v}_{3\text{к}} + \ldots + m_N\vec{v}_{N\text{к}}. \end{aligned} \qquad (5.3.7)$$

Здесь $\vec{v}_{i\text{н}}$ — скорости тел в начальный момент времени, а $\vec{v}_{i\text{к}}$ — в конечный. Так как импульс — величина векторная, то уравнение (5.3.7) представляет собой компактную запись трех уравнений для проекций импульса системы на координатные оси.

Когда выполняется закон сохранения импульса?

Все реальные системы, конечно, не являются замкнутыми, сумма внешних сил довольно редко может оказаться равной нулю. Тем не менее в очень многих случаях закон сохранения импульса можно применять.

Если сумма внешних сил не равна нулю, но равна нулю сумма проекций сил на какое-то направление, то проекция импульса системы на это направление сохраняется. Например, система тел на Земле или вблизи ее поверхности не может быть замкнутой, так как на все тела действует сила тяжести, которая изменяет импульс по вертикали согласно уравнению (5.3.5). Однако вдоль горизонтального направления сила тяжести не может изменять импульс, и сумма проекций импульсов тел на горизонтально направленную ось будет оставаться неизменной, если действием сил сопротивления можно пренебречь.

Кроме того, при быстрых взаимодействиях (взрыв снаряда, выстрел из орудия, столкновения атомов и т. п.) изменение импульсов отдельных тел будет фактически обусловлено только внутренними силами. Импульс системы сохраняется при этом с большой точностью, ибо такие внешние силы, как сила тяготения и сила трения, зависящая от скорости, заметно не изменяет импульса системы. Они малы по сравнению с внутренними силами. Так, скорость осколков снаряда при взрыве в зависимости от калибра может изменяться в пределах 600—1000 м/с. Интервал времени, за который сила тяжести смогла бы сообщить телам такую скорость, равен

$$\Delta t = \frac{m\Delta v}{mg} \approx 100 \text{ с}.$$

Внутренние же силы давления газов сообщают такие скорости за 0,01 с, т. е. в 10 000 раз быстрее.

Из второго и третьего законов Ньютона мы получили важнейшее следствие — закон сохранения импульса. Если сумма внешних сил равна нулю, то импульс системы сохраняется. Закон сохранения импульса выполняется для любых систем — будь то космические тела, атомы или элементарные частицы.

?
1. Чему равна сумма сил, действующих между молекулами воды в стакане?
2. Навстречу друг другу летят с равными по модулю скоростями два одинаковых пластилиновых шарика. После столкновения шарики останавливаются. Куда деваются их импульсы?
3. В лежащий на столе брусок попадает пуля, летящая горизонтально, и застревает в нем. Можно ли для нахождения скорости бруска с пулей применить закон сохранения импульса, несмотря на наличие трения?

§ 5.4. РЕАКТИВНОЕ ДВИЖЕНИЕ. УРАВНЕНИЕ МЕЩЕРСКОГО. РЕАКТИВНАЯ СИЛА

Любую задачу в механике можно решить с помощью законов Ньютона. Однако применение закона сохранения импульса во многих случаях значительно упрощает решение. Большое значение имеет закон сохранения импульса для исследования реактивного движения.

Какое движение называется реактивным?

Под реактивным движением понимают движение тела, возникающее при отделении некоторой его части с определенной скоростью относительно тела, например при истечении продуктов сгорания из сопла реактивного летательного аппарата. При этом появляется так называемая р е а к т и в н а я с и л а, сообщающая телу ускорение.

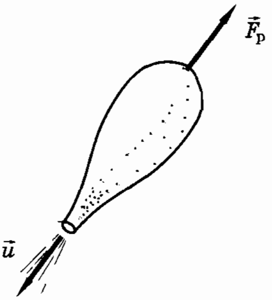


Рис. 5.4

Наблюдать реактивное движение очень просто. Надуйте детский резиновый шарик и отпустите его. Шарик стремительно взовьется вверх (рис. 5.4). Движение, правда, будет кратковременным. Реактивная сила действует лишь до тех пор, пока продолжается истечение воздуха.

Главная особенность реактивной силы состоит в том, что она возникает без какого-либо взаимодействия с внешними телами. Происходит лишь взаимодействие между ракетой и вытекающей из нее струей вещества.

Сила же, сообщающая ускорение автомобилю или пешеходу на земле, пароходу на воде или винтовому самолету в воздухе, возникает только за счет взаимодействия этих тел с землей, водой или воздухом.

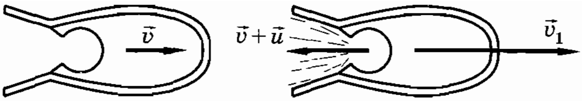
При истечении продуктов сгорания топлива они за счет давления в камере сгорания приобретают некоторую скорость относительно ракеты и, следовательно, некоторый импульс. Поэтому в соответствии с законом сохранения импульса сама ракета получает такой же по модулю импульс, но направленный в противоположную сторону.

Масса ракеты с течением времени убывает. Ракета в полете является телом переменной массы. Для расчета ее движения удобно применить закон сохранения импульса.

Уравнение Мещерского

Выведем уравнение движения ракеты и найдем выражение для реактивной силы. Будем считать, что скорость вытекающих из ракеты газов относительно ракеты постоянна и равна $\vec{u}$. Внешние силы на ракету не действуют: она находится в космическом пространстве вдали от звезд и планет.

Пусть в некоторый момент времени скорость ракеты относительно инерциальной системы, связанной со звездами, равна $\vec{v}$



а) *б)*

Рис. 5.5

(рис. 5.5, *а*), а масса ракеты равна M. Через малый интервал времени Δt масса ракеты станет равной

$$M_1 = M - \mu\Delta t,$$

где μ — расход топлива[1].

За этот же промежуток времени скорость ракеты изменится на $\Delta\vec{v}$ и станет равной $\vec{v}_1 = \vec{v} + \Delta\vec{v}$. Скорость истечения газов относительно выбранной инерциальной системы отсчета равна $\vec{v} + \vec{u}$ (рис. 5.5, *б*), так как до начала сгорания топливо имело ту же скорость, что и ракета.

Запишем закон сохранения импульса для системы ракета — газ:

$$M\vec{v} = (M - \mu\Delta t)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) + \mu\Delta t(\vec{v} + \vec{u}).$$

Раскрыв скобки, получим:

$$M\vec{v} = M\vec{v} - \mu\Delta t\vec{v} + M\Delta\vec{v} - \mu\Delta t\Delta\vec{v} + \mu\Delta t\vec{v} + \mu\Delta t\vec{u}.$$

Слагаемым $\mu\Delta t\Delta\vec{v}$ можно пренебречь по сравнению с остальными, так как оно содержит произведение двух малых величин (это величина, как говорят, второго порядка малости). После приведения подобных членов будем иметь:

$$M\Delta\vec{v} = -\mu\Delta t\vec{u},$$

или

$$M\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = -\mu\vec{u}. \qquad (5.4.1)$$

Это одно из уравнений Мещерского[2] для движения тела переменной массы, полученное им в 1897 г.

---

[1] Расходом топлива называется отношение массы сгоревшего топлива ко времени его сгорания.

[2] Мещерский И. В. (1859—1935) — профессор Петербургского политехнического института. Его труды по механике тел переменной массы стали теоретической основой ракетной техники.

Если ввести обозначение $\vec{F}_р = -\mu\vec{u}$, то уравнение (5.4.1) совпадет по форме записи со вторым законом Ньютона. Однако масса тела M здесь не постоянна, а убывает со временем из-за потери вещества.

Величина $\vec{F}_р = -\mu\vec{u}$ носит название реактивной силы. Она появляется вследствие истечения газов из ракеты, приложена к ракете и направлена противоположно скорости газов относительно ракеты. Реактивная сила определяется лишь скоростью истечения газов относительно ракеты и расходом топлива. Существенно, что она не зависит от деталей устройства двигателя. Важно лишь, чтобы двигатель обеспечивал истечение газов из ракеты со скоростью $\vec{u}$ при расходе топлива μ. Реактивная сила космических ракет достигает 1000 кН.

Если на ракету действуют внешние силы, то ее движение определяется реактивной силой и суммой внешних сил. В этом случае уравнение (5.4.1) запишется так:

$$M\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \vec{F}_р + \vec{F}. \qquad (5.4.2)$$

Принцип реактивного движения основан на том, что истекающие из реактивного двигателя газы получают импульс. Такой же по модулю импульс приобретает ракета.

?

1. Реактивное движение совершает кальмар (рис. 5.6). Как это ему удается?

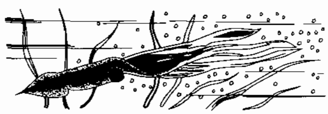


Рис. 5.6

2. Может ли парусная лодка приводиться в движение с помощью компрессора, установленного на лодке, если струя воздуха направлена на паруса? Что произойдет, если поток воздуха будет направлен мимо парусов?
3. Будет ли увеличиваться скорость ракеты, если скорость истечения газов относительно ракеты меньше скорости самой ракеты и вытекающие из сопла газы летят вслед за ракетой?

§ 5.5. РЕАКТИВНЫЕ ДВИГАТЕЛИ

Широкое применение реактивные двигатели в настоящее время получили в связи с освоением космического пространства. Применяются они также для метеорологических и военных ракет различного радиуса действия. Кроме того, все современные скоростные самолеты оснащены воздушно-реактивными двигателями.

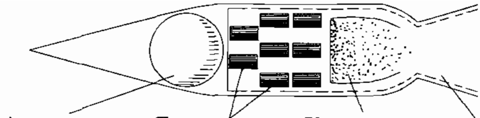


Рис. 5.7

В космическом пространстве использовать какие-либо другие двигатели, кроме реактивных, невозможно: нет опоры (твердой, жидкой или газообразной), отталкиваясь от которой космический корабль мог бы получить ускорение. Применение же реактивных двигателей для самолетов и ракет, не выходящих за пределы атмосферы, связано с тем, что именно реактивные двигатели способны обеспечить максимальную скорость полета.

Реактивные двигатели делятся на два класса: ракетные и воздушно-реактивные.

В ракетных двигателях топливо и необходимый для его горения окислитель находятся непосредственно внутри двигателя или в его топливных баках.

На рисунке 5.7 показана схема ракетного двигателя на твердом топливе. Порох или какое-либо другое твердое топливо, способное к горению в отсутствие воздуха, помещают внутрь камеры сгорания двигателя.

При горении топлива образуются газы, имеющие очень высокую температуру и оказывающие давление на стенки камеры. Сила давления на переднюю стенку камеры больше, чем на заднюю, где расположено сопло. Вытекающие через сопло газы не встречают на своем пути стенку, на которую могли бы оказывать давление. В результате появляется сила, толкающая ракету вперед.

Суженная часть камеры — сопло служит для увеличения скорости истечения продуктов сгорания, что в свою очередь повышает реактивную силу. Сужение струи газа вызывает увеличение его скорости, так как при этом через меньшее поперечное сечение в единицу времени должна пройти такая же масса газа, что и при большем поперечном сечении.

Применяются также ракетные двигатели, работающие на жидком топливе.

В жидкостно-реактивных двигателях (ЖРД) в качестве горючего можно использовать керосин, бензин, спирт, анилин, жидкий водород и др., а в качестве окислителя, необходимого для горения, — жидкий кислород, азотную кислоту, жидкий фтор, пероксид водорода и др. Горючее и окислитель хранятся

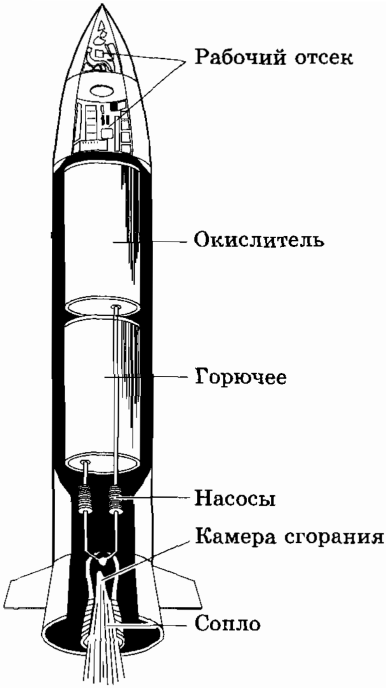


Рис. 5.8

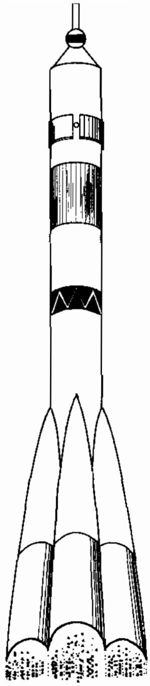


Рис. 5.9

отдельно в специальных баках и с помощью насосов подаются в камеру, где при сгорании топлива развивается температура до 3000 °C и давление до 50 атм (рис. 5.8). В остальном двигатель работает так же, как и двигатель на твердом топливе.

Жидкостно-реактивные двигатели используются для запуска космических кораблей (рис. 5.9).

Воздушно-реактивные двигатели в настоящее время применяют главным образом на самолетах (рис. 5.10). Основное их отличие от ракетных двигателей состоит в том, что окислителем для горения топлива служит кислород воздуха, поступающего внутрь двигателя из атмосферы.

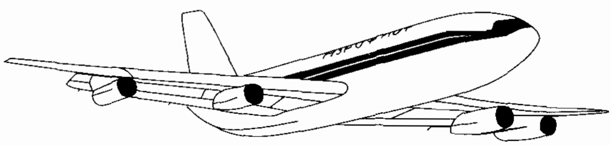


Рис. 5.10

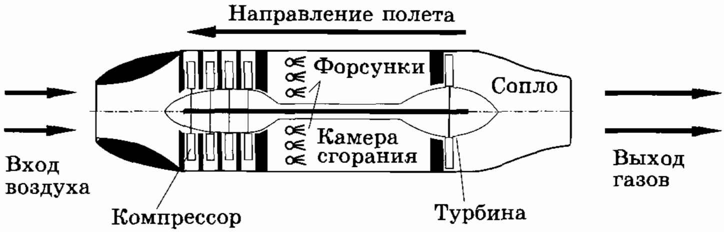


Рис. 5.11

На рисунке 5.11 изображена схема воздушно-реактивного двигателя турбокомпрессорного типа. В носовой части расположен компрессор, засасывающий и сжимающий воздух, который затем поступает в камеру сгорания. Жидкое горючее (обычно используется керосин) подается в камеру сгорания с помощью специальных форсунок.

Раскаленные газы (продукты сгорания), выходя через сопло, вращают газовую турбину, приводящую в движение компрессор. Турбокомпрессорные двигатели установлены в наших лайнерах Ту-134, Ил-62, Ил-86 и др.

Реактивными двигателями оснащены не только ракеты, но и большая часть современных самолетов.

§ 5.6. УСПЕХИ В ОСВОЕНИИ КОСМИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Автором первого в мире проекта реактивного летательного аппарата для полета людей был русский революционер-народоволец Н. И. Кибальчич (1853—1881).

Основы теории реактивного двигателя и научное доказательство возможности полетов в межпланетном пространстве были впервые высказаны и разработаны русским ученым К. Э. Циолковским в работе «Исследование мировых пространств реактивными приборами».

К. Э. Циолковскому принадлежит также идея применения многоступенчатых ракет. Отдельные ступени, из которых составлена ракета, снабжаются собственными двигателями и запасом топлива. По мере выгорания топлива каждая очередная ступень отделяется от ракеты. Поэтому в дальнейшем на ускорение ее корпуса и двигателя топливо не расходуется.

Идея Циолковского о сооружении большой станции-спутника на орбите вокруг Земли, с которой будут стартовать ракеты к другим планетам Солнечной системы, еще не осуществлена, но нет сомнения в том, что рано или поздно такая станция будет создана.

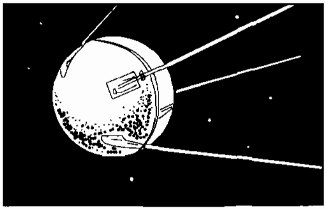


Рис. 5.12

В настоящее время становится реальностью пророчество Циолковского: «Человечество не останется вечно на Земле, но в погоне за светом и пространством сначала робко проникнет за пределы атмосферы, а затем завоюет себе все околосолнечное пространство».

Нашей стране принадлежит великая честь запуска 4 октября 1957 г. первого искусственного спутника Земли (рис. 5.12). Также впервые в нашей стране 12 апреля 1961 г. был осуществлен полет космического корабля с космонавтом Ю. А. Гагариным на борту.

Эти полеты были совершены на ракетах, сконструированных отечественными учеными и инженерами под руководством С. П. Королева.

Большие заслуги в исследовании космического пространства имеют американские ученые, инженеры и астронавты. Два американских астронавта из экипажа космического корабля «Аполлон-11» — Нейл Армстронг и Эдвин Олдрин — 20 июля 1969 г.

Циолковский Константин Эдуардович (1857—1935) — знаменитый русский ученый, основоположник теории межпланетных сообщений, изобретатель в области реактивных летательных аппаратов, воздухоплавания, аэродинамики.
В 1903 г. в работе «Исследование мировых пространств реактивными приборами» Циолковский создал теорию полета ракеты с учетом изменения ее массы в процессе движения и выдвинул идею о применении ракетных двигателей для межпланетных кораблей.
В 1929 г. им была создана теория движения составных (ступенчатых) ракет. Такие ракеты теперь являются основными в космонавтике. Они используются для вывода на орбиты искусственных спутников Земли и запуска космических аппаратов к Луне и планетам Солнечной системы.

Королев Сергей Павлович (1907—1966) — академик, выдающийся ученый, конструктор ракет, человек, с именем которого связано начало космической эры. Первый искусственный спутник, первый полет человека в космос были осуществлены под его руководством. С. П. Королев — генеральный конструктор космических кораблей «Восток» и «Восход».

впервые совершили посадку на Луну. На космическом теле Солнечной системы человеком были сделаны первые шаги.

С выходом человека в космос не только открылись возможности исследования других планет, но и представились поистине фантастические возможности изучения природных явлений и ресурсов Земли, о которых можно было только мечтать. Возникло космическое природоведение. Раньше общая карта Земли составлялась по крупицам, как мозаичное панно. Теперь снимки с орбиты, охватывающие миллионы квадратных километров, позволяют выбирать для исследования наиболее интересные участки земной поверхности, экономя тем самым силы и средства.

Из космоса лучше различаются крупные геологические структуры: плиты, глубинные разломы земной коры — места наиболее вероятного залегания полезных ископаемых. Из космоса удалось обнаружить новый тип геологических образований — кольцевые структуры, подобные кратерам Луны и Марса.

Гагарин Юрий Алексеевич (1934—1968) — летчик-космонавт, первый человек, совершивший полет в космос. 12 апреля 1961 г. впервые в мире совершил полет в космос на корабле-спутнике «Восток», облетев земной шар за 1 ч 48 мин. Принимая непосредственное участие в обучении и тренировке космонавтов, руководил космическими полетами. 27 марта 1968 г. Ю. А. Гагарин трагически погиб при выполнении тренировочного полета на самолете. Именем Гагарина назван кратер на стороне Луны, невидимой с Земли.

Сейчас на орбитальных комплексах разработаны технологии получения материалов, которые нельзя изготовить на Земле, а только в состоянии длительной невесомости в космосе. Стоимость этих материалов (сверхчистые монокристаллы и др.) близка к затратам на запуск космических аппаратов.

§ 5.7. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Закон сохранения импульса целесообразно применять для решения тех задач, в которых требуется определять скорости, а не силы или ускорения. Конечно, решать подобные задачи можно, используя законы Ньютона. Но применение закона сохранения импульса упрощает решение.

Прежде чем решать задачу с помощью закона сохранения импульса, надо выяснить, можно ли его применять в данном случае. Закон можно применять для замкнутой системы или же в случае, когда сумма проекций сил на какое-либо направление равна нулю, а также когда импульсом внешних сил можно пренебречь.

Для решения задачи нужно записать закон в векторной форме (5.3.7).

После этого векторное уравнение записывают в проекциях на оси выбранной системы координат[1].

Выбор направления осей диктуется удобством решения задачи. Если, например, все тела движутся вдоль одной прямой, то координатную ось целесообразно направить вдоль этой прямой.

При решении некоторых задач приходится использовать дополнительно уравнения кинематики.

Некоторые задачи решаются с применением уравнения изменения импульса в форме (5.3.5).

Задача 1

Стальной шарик массой 0,05 кг падает с высоты 5 м на стальную плиту. После столкновения шарик отскакивает от плиты с такой же по модулю скоростью. Найдите силу, действующую на плиту при ударе, считая ее постоянной. Время соударения равно 0,01 с.

Решение. При ударе шар и плита действуют друг на друга с силами, равными по модулю, но противоположными по направле-

---

[1] Иногда целесообразно решать задачу, используя закон сложения векторов.

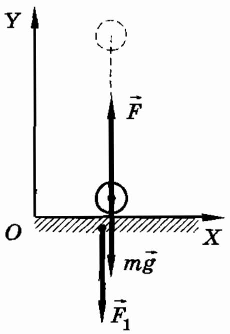


Рис. 5.13

нию. Определив силу, действующую на шарик со стороны плиты, мы тем самым найдем силу, с которой шарик действовал на плиту за время Δt, в течение которого длится соударение.

Во время соударения на шарик действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила $\vec{F}$ со стороны плиты (рис. 5.13). Согласно уравнению (5.2.3)

$$\Delta\vec{p} = (\vec{F} + m\vec{g})\Delta t.$$

Обозначим через $\vec{v}_1$ скорость шарика непосредственно до удара о плиту, а через $\vec{v}_2$ — скорость после удара, тогда изменение импульса шарика $\Delta\vec{p} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$; поэтому

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = (\vec{F} + m\vec{g})\Delta t.$$

В проекциях на ось Y это уравнение запишется так:

$$mv_2 - (-mv_1) = (F - mg)\Delta t.$$

Учитывая, что $v_2 = v_1 = v$, получим

$$F = mg + \frac{2mv}{\Delta t}. \qquad (5.7.1)$$

Модуль скорости шарика при падении его с высоты h определяется по формуле $v = \sqrt{2gh} = 10$ м/с. Теперь, используя выражение (5.7.1), найдем модуль силы $\vec{F}$:

$$F = 0{,}5 \text{ Н} + 100 \text{ Н} = 100{,}5 \text{ Н}.$$

По третьему закону Ньютона

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}.$$

Следовательно, $F_1 = 100{,}5$ Н; эта сила приложена к плите и направлена вниз.

Заметим, что чем меньше время взаимодействия Δt, тем большим будет значение величины $\frac{2mv}{\Delta t}$ в формуле (5.7.1) по сравнению с mg. Поэтому при соударении можно не учитывать силу тяжести. Если бы шар был сделан из пластилина, то он бы прилип к плите и модуль изменения его импульса был бы в два раза меньше. Соответственно и сила, действующая на плиту, была бы также в два раза меньше.

Задача 2

Во время маневров на железнодорожной станции две платформы массами $m_1 = 2{,}4 \cdot 10^4$ кг и $m_2 = 1{,}6 \cdot 10^4$ кг двигались навстречу друг другу со скоростями, модули которых равны $v_1 = 0{,}5$ м/с и $v_2 = 1$ м/с. Найдите скорость их совместного движения после того, как сработала автосцепка.

Решение. Изобразим схематично движущиеся платформы до столкновения (рис. 5.14). Внешние силы $\vec{N}_1$ и $m_1\vec{g}$, $\vec{N}_2$ и $m_2\vec{g}$, действующие на тела системы, взаимно уравновешены. На платформы действуют еще силы трения, которые являются внешними для системы. При качении платформ по рельсам силы трения невелики, поэтому за малый интервал времени столкновения они заметно не изменят импульс системы. Следовательно, можно применить закон сохранения импульса:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u},$$

где $\vec{u}$ — скорость платформ после сцепки.

В проекциях на ось X имеем:

$$m_1v_{1x} + m_2v_{2x} = (m_1 + m_2)u_x.$$

Так как $v_{1x} = v_1$, а $v_{2x} = -v_2$, то

$$u_x = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2} = -0{,}1 \text{ м/с}.$$

Отрицательный знак проекции скорости показывает, что скорость направлена противоположно оси X (справа налево).

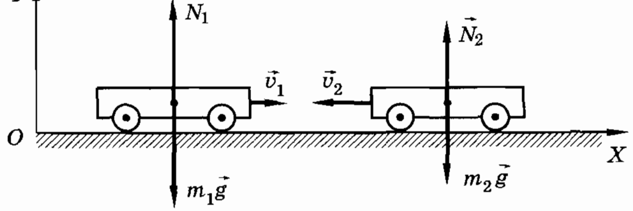


Рис. 5.14

Задача 3

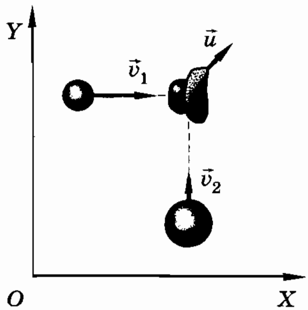


Рис. 5.15

Два пластилиновых шарика, отношение масс которых $\frac{m_2}{m_1} = 4$, после соударения слиплись и стали двигаться по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью $\vec{u}$ (рис. 5.15, вид сверху). Определите скорость легкого шара до соударения[1], если он двигался втрое быстрее тяжелого ($v_1 = 3v_2$), а направления движения шаров были взаимно перпендикулярны. Трением пренебречь.

Решение. Так как скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ шаров взаимно перпендикулярны, то оси прямоугольной системы координат удобно направить параллельно этим скоростям.

Согласно закону сохранения импульса имеем:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}.$$

Запишем это уравнение в проекциях на оси X и Y, проведенные так, как показано на рисунке 5.15:

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2)u_x,$$
$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = (m_1 + m_2)u_y.$$

Так как $v_{1x} = v_1$, $v_{2x} = 0$, $v_{1y} = 0$ и $v_{2y} = v_2$, то

$$u_x = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{3}{5}v_2,$$

$$u_y = \frac{m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{4}{5}v_2.$$

Модуль скорости $\vec{u}$ равен:

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = v_2.$$

Итак, $v_2 = u$, следовательно, $v_1 = 3u$.

---

[1] Если после соударения тела движутся с одинаковой скоростью, то такой удар называется абсолютно неупругим.

Задача 4

Кузнечик сидит на конце соломинки длиной l, которая лежит на гладком полу. Кузнечик прыгает и попадает на другой конец соломинки. С какой минимальной начальной скоростью относительно пола $\vec{v}_{min}$ он должен прыгнуть, если его масса M, а масса соломинки m? Сопротивление воздуха и трение не учитывать.

Решение. Направим ось Y вверх, а ось X вдоль соломинки по направлению прыжка кузнечика (рис. 5.16). Проекции скорости $\vec{v}$ кузнечика на координатные оси соответственно равны:

$$v_x = v\cos\alpha \text{ и } v_y = v\sin\alpha.$$

Рассмотрим систему кузнечик — соломинка. На тела системы внешние силы действуют лишь по вертикальному направлению (трение отсутствует).

Так как сумма проекций внешних сил на ось X равна нулю, то сохраняется сумма проекций импульсов кузнечика и соломинки на ось X:

$$Mv_x + mv_{1x} = 0 \text{ или } Mv\cos\alpha + mv_{1x} = 0,$$

где v_{1x} — проекция скорости соломинки относительно пола.

Отсюда

$$v_{1x} = -\frac{Mv\cos\alpha}{m}.$$

Знак минус указывает, что соломинка получает скорость $\vec{v}_1$, направленную противоположно оси X.

Далее задача решается с помощью формул кинематики (см. § 1.24). Время полета кузнечика

$$t = \frac{2v_y}{g} = \frac{2v\sin\alpha}{g}.$$

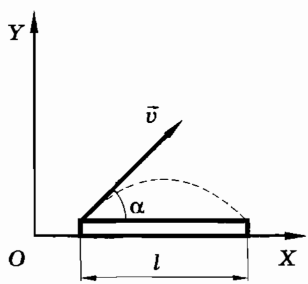


Рис. 5.16

По горизонтальному направлению кузнечик относительно соломинки пролетит расстояние l.

Следовательно, модуль горизонтальной составляющей его скорости относительно движущейся соломинки равен:

$$v_{от} = \frac{l}{t} = \frac{gl}{2v\sin\alpha}.$$

Но с другой стороны,

$$v_{от} = v_1 + v\cos\alpha = \left(\frac{M}{m} + 1\right)v\cos\alpha.$$

Таким образом,

$$\frac{gl}{2v\sin\alpha} = \left(\frac{M}{m} + 1\right)v\cos\alpha.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{\frac{mgl}{(M + m)\sin 2\alpha}}.$$

Очевидно, что модуль скорости кузнечика минимален тогда, когда максимален знаменатель дроби полученного выражения. Как известно, значение синуса не может быть больше 1. Итак,

$$\sin 2\alpha = 1,\ \alpha = 45° \text{ и } v_{\min} = \sqrt{\frac{mgl}{M + m}}.$$

Задача 5

В начальный момент времени ракета массой M имела скорость v_0. В конце каждой секунды из ракеты выбрасывается порция газа массой m. Скорость порции газа отличается от скорости ракеты до сгорания данной массы газа на постоянное значение, равное u, т. е. скорость истечения газа постоянна. Определите скорость ракеты через n секунд. Действие силы тяжести не учитывать.

Решение. Обозначим через v_k скорость ракеты в конце k-й секунды. В конце $(k + 1)$-й секунды из ракеты выбрасывается газ массой m, который уносит с собой импульс, равный $m(-u + v_k)$. Из закона сохранения импульса, записанного для модулей векторов, следует, что

$$(M - km)v_k = [M - (k + 1)m]v_{k+1} + m(-u + v_k).$$

Изменение скорости ракеты за 1 с равно:

$$v_{k+1} - v_k = \frac{mu}{M - (k + 1)m}.$$

Зная изменение скорости за 1 с, можно написать выражение для скорости в конце n-й секунды:

$$v_n = v_0 + u\left(\frac{m}{M - m} + \frac{m}{M - 2m} + \ldots + \frac{m}{M - nm}\right).$$

Упражнение 10

1. Свинцовый шар массой 200 г движется перпендикулярно стене со скоростью 10 м/с и сталкивается с ней. Найдите силу, действующую на стену при ударе, считая ее постоянной. Время столкновения равно 0,01 с. Шар не отскакивает от стены.

2. Стальной шар массой 100 г движется по горизонтальной поверхности без трения в направлении, перпендикулярном стене. Скорость шара до удара равна 10 м/с. После соударения шар отскакивает от стены с такой же по модулю скоростью, но в противоположном направлении. Найдите силу, действующую на стену при ударе, считая ее постоянной. Время соударения 0,01 с.

3. По рельсам в горизонтальном направлении катится тележка с песком. Через отверстие в дне песок ссыпается между рельсами. Изменяется ли скорость тележки? Трение не учитывать.

4. На платформу массой 600 кг, движущуюся горизонтально со скоростью 1 м/с, насыпали сверху 200 кг щебня. Чему стала равна скорость платформы?

5. Ракета, масса которой вместе с зарядом равна 250 г, взлетает вертикально вверх и достигает высоты 150 м. Определите скорость истечения газов из ракеты, считая, что сгорание заряда происходит мгновенно. Масса заряда равна 50 г.

6. Призма массой M с углом наклона α находится на гладком льду. На призме у ее основания стоит собака массой m. С какой скоростью будет двигаться призма, если собака побежит вверх по призме со скоростью v относительно нее?

7. Граната, брошенная от поверхности Земли, разрывается на два одинаковых осколка в наивысшей точке траектории на расстоянии a от места бросания, считая по горизонтали. Один из осколков летит в обратном направлении с той же по модулю скоростью, которую имела граната до разрыва. На каком расстоянии l от места бросания упадет второй осколок?

8. Две ракеты массой M каждая летят в одном направлении: одна со скоростью v, а другая со скоростью $v_1 = 1{,}1v$. Когда одна ракета догнала другую, на короткое время был включен двигатель первой ракеты. Какую массу отработанного топлива она должна выбросить со скоростью $v_2 = 3v$ относительно ракеты, чтобы скорости ракет для совершения безопасной стыковки стали равными?

9. Две лодки идут параллельными курсами навстречу друг другу с одинаковыми по модулю скоростями. При встрече лодки обмениваются грузами, имеющими одинаковую массу. Обмен может происходить двумя способами: 1) сначала с одной лодки на другую перебрасывают груз, а затем со второй лодки перебрасывают груз обратно на первую; 2) грузы перебрасывают из лодки в лодку одновременно. При каком способе скорость лодок после перебрасывания грузов будет больше?

10. Три лодки с одинаковыми массами M движутся по инерции друг за другом с одинаковыми скоростями v. Из средней лодки в крайние одновременно перебрасывают грузы массой m со скоростью u относительно лодок. Какие скорости будут иметь лодки после перебрасывания грузов? Сопротивление воды и присоединенную массу не учитывать.

11. Снаряд разрывается в верхней точке траектории на две равные части. Одна половина снаряда получает скорость, направленную вертикально вниз, и падает под местом разрыва, а вторая половина снаряда оказывается на расстоянии l по горизонтали от этого места. Определите модуль скорости снаряда перед разрывом и модуль скорости второго осколка, если известно, что взрыв произошел на высоте H и первый осколок достиг поверхности Земли через промежуток времени, равный t.

12. Человек, находящийся в лодке, переходит с ее носовой части на корму. На какое расстояние относительно воды переместится лодка длиной l, если масса человека m_1, а масса лодки m_2? Сопротивление воды и присоединенную массу не учитывать.

13. Клин с углом α при основании может без трения перемещаться по гладкой горизонтальной поверхности (рис. 5.17). При каком соотношении масс m_1 и m_2 грузов, связанных нитью, перекинутой через блок, клин будет неподвижен и при каком соотношении масс клин начнет перемещаться вправо или влево? Коэффициент трения между грузом массой m_2 и клином равен μ.

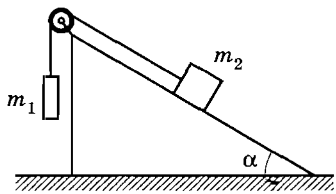


Рис. 5.17

14. Снаряд, запущенный вертикально вверх, разрывается в самой верхней точке подъема на два одинаковых осколка, один из которых летит вверх, а другой — вниз. С какой скоростью упадет на землю второй осколок, если первый падает на нее со скоростью v?

15. Элементарная частица распадается на две части массами m_1 и m_2, имеющие скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, угол между которыми равен α. Чему равен импульс частицы до распада?

16. Водометный катер движется по озеру. Сила сопротивления воды движению катера по модулю равна $F = kv$. Скорость выбрасываемой воды относительно катера равна u. Определите установившуюся скорость катера, если площадь сечения потока воды, выбрасываемой двигателем, равна S, а плотность воды равна ρ.

17. С какой силой давит на землю кобра, когда она, готовясь к броску, поднимается вертикально вверх с постоянной скоростью v? Масса кобры m, а ее длина l.

Глава 6

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Энергия — самая важная сохраняющаяся величина не только в механике, но и в физике вообще. Понять, что такое энергия, нелегко. Но энергия тесно связана с работой. Мы начнем с изучения работы силы. Эта величина более проста и наглядна.

§ 6.1. ДВИГАТЕЛИ

С точки зрения механики мы с вами и любые двигатели делаем одно и то же.

Наши действия с точки зрения механики

Все наши ежедневные действия сводятся к тому, что мы с помощью мышц либо приводим в движение окружающие тела и поддерживаем это движение, либо же останавливаем движущиеся тела. Этими телами являются орудия труда (молоток, ручка, пила), в играх — мячи, шайбы, шахматные фигуры.

На производстве и в сельском хозяйстве люди также приводят в движение орудия труда. Правда, в настоящее время роль рабочего все больше и больше сводится к управлению механизмами. Но в любой машине можно обнаружить подобие простых орудий ручного труда. В швейной машине имеется игла; резец токарного станка подобен рубанку; ковш экскаватора заменяет лопату.

Двигатели

Применение машин во много раз увеличивает производительность труда благодаря использованию в них двигателей.

Двигатели могут быть совершенно различными. Автомобили и тракторы приводятся в действие двигателями внутреннего сгорания (рис. 6.1, *а*), суда — паровыми турбинами (рис. 6.1, *б*), станки и электровозы — электродвигателями (рис. 6.1, *в*), часы — пружинами или гирями (рис. 6.1, *г*) и т. д. Мышцы человека или руку робота тоже можно рассматривать как своеобразные двигатели (рис. 6.1, *д*).

Назначение любого двигателя состоит в том, чтобы приводить тела в движение и поддерживать это движение, несмотря на торможение как обычным трением, так и «рабочим» сопротивлением (резец должен не просто скользить по металлу, а, врезаясь в него, снимать стружку; плуг должен взрыхлять землю и т. д.). При этом на движущееся тело должна действовать со стороны двигателя сила, точка приложения которой перемещается вместе с телом.

Обиходное представление о работе

Когда человек или какой-либо двигатель действуют с определенной силой на движущееся тело, то мы говорим, что они совершают работу. Это обиходное представление о работе легло в основу формирования одного из важнейших понятий механики — понятия работы силы. Работу совершают, конечно, не только человек или созданные им двигатели. Работа совершается в природе всегда, когда на какое-либо движущееся тело действует сила (или несколько сил) со стороны другого тела (или других тел). Так, сила тяготения совершает работу при падении капель дождя или камня с обрыва. Одновременно совершают работу и силы трения, действующие на падающие капли или камень со стороны воздуха. Совершает работу и сила упругости, когда, например, распрямляется согнутое ветром дерево.

Все мы, как и любые двигатели, совершаем работу: приводим в движение тела, поддерживаем это движение или же прекращаем его.

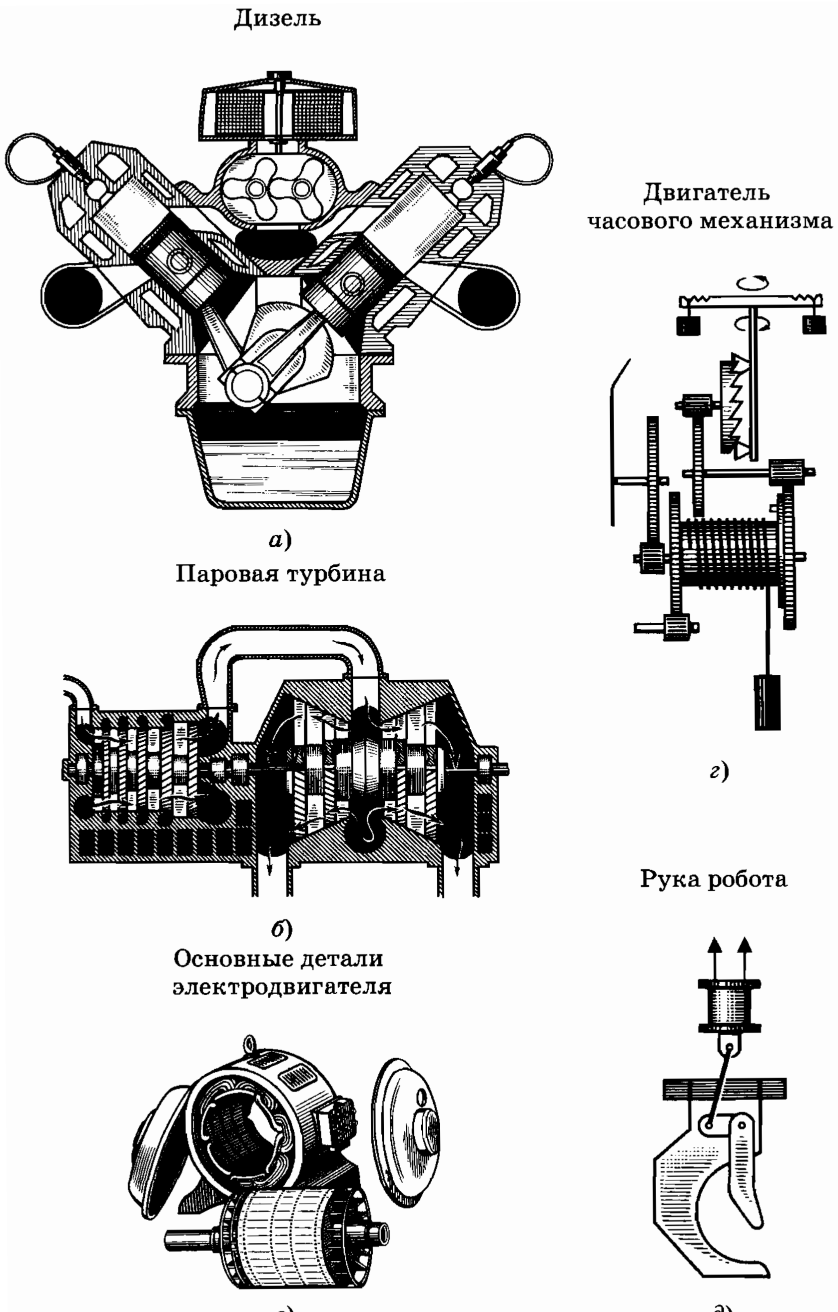

Дизель
а)
Паровая турбина
б)
Основные детали
электродвигателя
в)
Двигатель
часового механизма
г)
Рука робота
д)

Рис. 6.1

§ 6.2. РАБОТА СИЛЫ

Слово «работа» часто встречается в повседневной жизни в довольно разнообразных смыслах. В младших классах вы уже познакомились с понятием работы в физике. Однако многие существенные моменты этого понятия остались вне поля зрения.

Импульс силы и работа

Второй закон Ньютона, записанный в форме $\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$, позволяет определить, как меняется скорость тела $\vec{v}$ по модулю и направлению, если на тело в течение времени Δt действует сила $\vec{F}$.

Но во многих случаях важно уметь вычислять изменение скорости по модулю, если при перемещении тела на $\Delta\vec{r}$ на него действует сила $\vec{F}$. Действия сил на тела, приводящие к изменению модуля их скоростей, характеризуются величиной, зависящей как от сил, так и от перемещений тел, на которые эти силы действуют. Эту величину называют р а б о т о й.

Определение работы

Нужно передвинуть шкаф из одного угла комнаты в другой. Никто не усомнится в том, что совершаемая при этом работа тем больше, чем больше перемещение шкафа. Тяжелый шкаф требует для своего перемещения большей работы из-за того, что к нему надо прикладывать бóльшую силу. Поэтому естественно считать работу пропорциональной произведению силы на перемещение.

Однако в физике работа определяется несколько иначе. Для приведения тела в движение и для его остановки на тело должна действовать сила, совершающая работу. Но при движении с постоянной скоростью в отсутствие трения совершать работу не нужно. Согласно закону инерции тело движется с постоянной скоростью без действия на него сил. Не совершается работа и в том случае, когда сила перпендикулярна скорости. В этом случае скорость тела не меняется по модулю (см. § 2.5) и необходимое ускорение телу сообщает сила, перпендикулярная скорости. При движении по окружности модуль этой силы не меняется. Так, камень, раскрученный на веревке, в отсутствие трения будет двигаться сам собой сколь угодно долго. Работа при этом не совершается. Она необходима только для сообщения камню постоянной скорости.

Изменение скорости по модулю возможно лишь в том случае, когда проекция силы на направление перемещения тела F_r отлична от нуля. Именно эта проекция определяет действие силы, изменяющее скорость тела по модулю, а значит, и совершаемую работу. Поэтому работу следует рассматривать как произведение проекции F_r на модуль $|\Delta\vec{r}|$ перемещения (рис. 6.2):

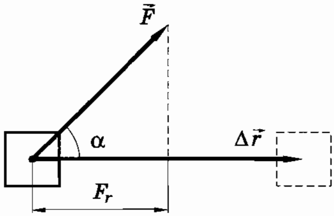


Рис. 6.2

$$A = F_r|\Delta\vec{r}|. \qquad (6.2.1)$$

Если угол между силой и перемещением обозначить через α, то $F_r = F\cos\alpha$. Следовательно, работа равна

$$\boxed{A = F|\Delta\vec{r}|\cos\alpha.} \qquad (6.2.2)$$

Работа силы равна произведению модулей силы и перемещения и косинуса угла между ними.

Формулы (6.2.1) и (6.2.2) справедливы в том случае, когда сила постоянна и перемещение тела происходит вдоль прямой. Малые отрезки траектории всегда можно считать прямолинейными, а силу на малом отрезке постоянной.

Работа может быть как положительной, так и отрицательной. Знак работы определяется знаком косинуса угла между силой и перемещением. Если $\alpha < 90°$, то работа положительна ($A > 0$), так как косинус острых углов положителен. При $\alpha > 90°$ работа отрицательна, так как косинус тупых углов отрицателен. При $\alpha = 90°$ (сила перпендикулярна перемещению) работа не совершается. Так, сила тяжести не совершает работу при перемещении тела вдоль горизонтальной плоскости. При движении спутника по круговой орбите сила тяготения также не совершает работы.

Работа нескольких сил, действующих на одно тело

Если на тело действует несколько сил, то проекция результирующей силы на перемещение равна сумме проекций отдельных сил:

$$F_r = F_{1r} + F_{2r} + F_{3r} + \ldots \qquad (6.2.3)$$

Поэтому для работы результирующей силы получим выражение

$$A = F_r|\Delta\vec{r}| = F_{1r}|\Delta\vec{r}| + F_{2r}|\Delta\vec{r}| + F_{3r}|\Delta\vec{r}| + \ldots \qquad (6.2.4)$$

Итак, **если на тело действует несколько сил, то полная работа (работа всех сил) равна работе результирующей силы.**

Иногда говорят, что работа данной силы равна произведению проекции силы на перемещение, вызванное данной силой. Из формулы (6.2.4) видно, что это неверно. Работа данной силы $\vec{F}_i$ есть произведение проекции $\vec{F}_{ir}$ этой силы на модуль $|\Delta\vec{r}|$ перемещения тела. Не важно, что вызывает перемещение тела. На него, кроме данной силы, могут действовать другие силы. Перемещение зависит от скорости, которую успело приобрести тело. Работа же данной силы всегда определяется произведением этой силы на перемещение тела и на косинус угла между силой и перемещением.

Работа как скалярное произведение силы и перемещения

Из определения работы следует, что она в отличие от силы и перемещения является не векторной, а скалярной величиной. В математике произведение модулей двух векторов на косинус угла между ними называют скалярным произведением векторов и записывают так: $\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$. Это выражение есть компактная символическая запись произведения $F|\Delta\vec{r}|\cos\alpha$:

$$\vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F|\Delta\vec{r}|\cos\alpha.$$

Следовательно, работа равна:

$$A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}. \qquad (6.2.5)$$

Скалярное произведение двух векторов $\vec{F}$ и $\Delta\vec{r}$ можно выразить через произведения проекций этих векторов. Покажем это для движения на плоскости.

Рисунок 6.3, *а* иллюстрирует случай, когда угол α между векторами $\vec{F}$ и $\Delta\vec{r}$ меньше 90°. Работа при этом положительна. Разложим вектор $\vec{F}$ на составляющие $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$, параллельные осям X и Y: $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$. Тогда работа

$$A = |\vec{F}_x|\,|\Delta\vec{r}|\cos\beta + |\vec{F}_y|\,|\Delta\vec{r}|\cos\gamma. \qquad (6.2.6)$$

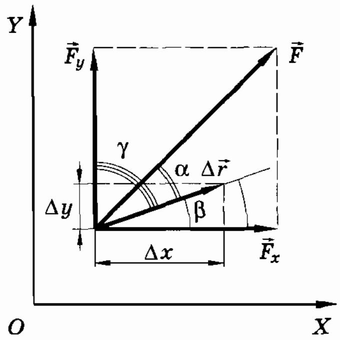
Очевидно, что

$$|\Delta\vec{r}|\cos\beta = \Delta x \text{ и } |\Delta\vec{r}|\cos\gamma = \Delta y,$$

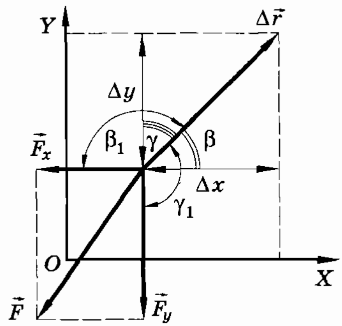
где Δx и Δy — проекции вектора $\Delta\vec{r}$ на соответствующие оси.

Для данного случая $|\vec{F}_x| = F_x$ и $|\vec{F}_y| = F_y$, так как проекции силы $\vec{F}$ на оси X и Y положительны. Поэтому

$$A = F_x\Delta x + F_y\Delta y. \qquad (6.2.7)$$



а)



б)

Рис. 6.3

Этот результат остается справедливым и в том случае, когда сила $\vec{F}$ составляет с перемещением тупой угол и работа отрицательна (рис. 6.3, *б*). Теперь

$$\begin{aligned} A &= |\vec{F}_x|\,|\Delta\vec{r}|\cos\beta_1 + |\vec{F}_y|\,|\Delta\vec{r}|\cos\gamma_1 = \\ &= |\vec{F}_x|\,|\Delta\vec{r}|\cos(180° - \beta) + |\vec{F}_y|\,|\Delta\vec{r}|\cos(180° - \gamma) = \\ &= -|\vec{F}_x|\,|\Delta\vec{r}|\cos\beta - |\vec{F}_y|\,|\Delta\vec{r}|\cos\gamma = \\ &= -|\vec{F}_x|\Delta x - |\vec{F}_y|\Delta y. \end{aligned} \qquad (6.2.8)$$

Но в данном случае $|\vec{F}_x| = -F_x$ и $|\vec{F}_y| = -F_y$. Поэтому получаем для работы то же выражение (6.2.7).

В трехмерном случае эта формула имеет вид:

$$A = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z. \qquad (6.2.9)$$

Зависимость работы от системы отсчета

Если тело, к которому приложена сила, не перемещается в пространстве относительно данной системы отсчета, то работа силы равна нулю. Так, при скольжении тела по поверхности стола сила трения $\vec{F}_1$, приложенная к телу, совершает работу, а сила трения $\vec{F}_2$, приложенная к поверхности стола, никакой работы в системе отсчета, связанной с этой поверхностью, не совершает (рис. 6.4). Дело в том, что точки поверхности, к которым приложена сила трения, не перемещаются. Перемещается при скольжении сама сила трения. (Точнее, она перестает

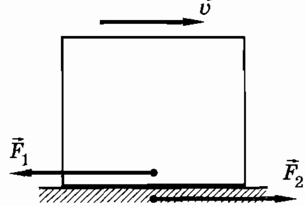


Рис. 6.4

действовать на одни неподвижные участки поверхности и начинает действовать на другие.)

Совершенная работа, конечно, зависит от выбора системы отсчета. Ведь тело, неподвижное в одной системе отсчета, будет перемещаться в другой, движущейся относительно первой. Расстояние между телами одинаково во всех системах отсчета, но перемещение не одинаково. Например, если человек стоит в поезде и просто удерживает растянутую пружину, то в системе отсчета, связанной с поездом, рука человека не совершает никакой работы, так как свободный конец пружины не перемещается. Но с точки зрения наблюдателя, в системе отсчета, связанной с Землей, работа будет произведена. При переходе от одной системы отсчета к другой работа может даже изменить знак, так как направление перемещения зависит от выбора системы отсчета. Поэтому, когда мы говорим о работе как об определенной величине, нужно указывать, относительно какой системы отсчета она вычисляется.

Работа в физике и повседневной жизни

Понятие работы в физике отличается от того, что под этим подразумевают в повседневной жизни. Если вы подняли гирю в несколько килограммов и держите ее на весу, то с точки зрения механики вы совершили работу только при подъеме груза. Однако непосредственные ощущения говорят о другом. Держать гирю на весу ненамного легче, чем поднимать ее вверх, хотя механическая работа при этом, по-видимому, не совершается. Почему же одинаковые ощущения возникают в том и другом случае? Это объясняется тем, что мышцы, приводящие в движение руки или ноги (они называются поперечно-полосатыми или скелетными), способны к быстрым сокращениям, но каждое сокращение длится малое время. Сокращение мышцы вызывается сигналом, поступающим к ней по нервам от головного мозга. Если вы длительное время держите груз на весу, такие сигналы непрерывно друг за другом поступают к мышце. Когда приходит очередной сигнал, мышца сокращается, но тут же сама по себе расслабляется впредь до получения следующего сигнала. В результате груз, который вы держите, испытывает малые колебания вверх и вниз. Рука дрожит, что особенно хорошо заметно, если держать тяжелую гирю достаточно долго. Таким образом, скелетные мышцы не способны удерживать груз в строго определенном положении. При периодическом поднятии груза на малые расстояния работа будет совершаться. Поэтому рука устает не только когда вы поднимаете груз, но и когда держите его на весу.

Кроме поперечно-полосатых мышц существуют так называемые гладкие мышцы. Ими снабжены, например, моллюски. Створки раковин закрываются такими мышцами. Гладкие мышцы после сокращения «замирают» и в дальнейшем никакой работы не совершают. Однако эти мышцы сокращаются очень медленно по сравнению с поперечно-полосатыми. Почему природа не создала быстродействующие гладкие мышцы, до сих пор не ясно.

Работа переменной силы на произвольном участке пути

В общем случае для вычисления работы переменной силы на произвольном участке пути нужно поступать следующим образом. Участок пути нужно разбить на очень малые участки $\Delta\vec{r}_i$ такие, что силу $\vec{F}_i$ на каждом отрезке перемещения можно считать постоянной по модулю и направлению (рис. 6.5). Тогда элементарная работа на малом участке равна

$$\Delta A_i = \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i. \qquad (6.2.10)$$

Полная работа на конечном участке пути BC будет равна:

$$A = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{r}_2 + \vec{F}_3 \cdot \Delta\vec{r}_3 + \ldots = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i. \qquad (6.2.11)$$

Здесь символ Σ означает суммирование произведений $\vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$, а N — число малых участков, на которые разбит весь участок пути.

Графическое представление работы

Дадим наглядное графическое представление работы для случая, когда тело движется прямолинейно вдоль оси X (рис. 6.6). Для этого изобразим график зависимости проекции

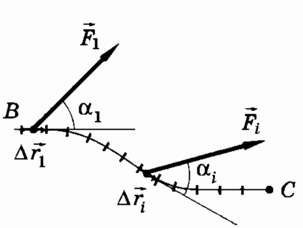


Рис. 6.5

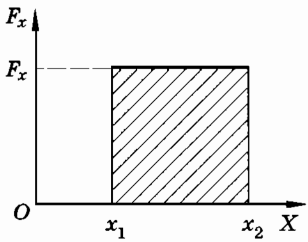


Рис. 6.6

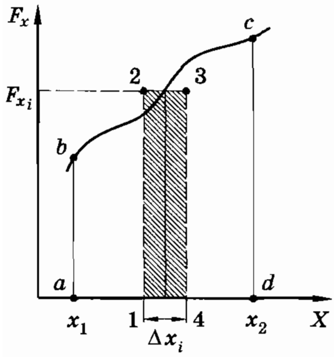


Рис. 6.7

силы от координаты тела. Если сила постоянна, то график будет представлять собой прямую, параллельную оси X (см. рис. 6.6). Работа

$$A = F|\Delta\vec{r}|\cos\alpha = F_x\Delta x.$$

Очевидно, что площадь прямоугольника, заштрихованного на рисунке, численно равна работе при перемещении тела из точки с координатой x_1 в точку с координатой x_2.

Если при движении по прямой сила меняется от точки к точке траектории, то зависимость проекции F_x от положения тела на прямой изобразится некоторой кривой bc (рис. 6.7). Площадь, ограниченная этой кривой, осью X и отрезками ab и cd, равными проекциям сил в начальной и конечной точках пути, численно равна работе при перемещении тела из точки b в точку c. В самом деле, работа на малом участке пути Δx_i численно равна площади прямоугольника 1234, так как $\Delta A = F_{xi}\Delta x_i$ (F_{xi} — значение проекции силы на этом участке). Полную же площадь фигуры можно рассматривать как сумму площадей таких элементарных прямоугольников. Согласно формуле (6.2.11) она равна искомой работе.

Единицы работы

Единицы работы можно установить с помощью основной формулы (6.2.1), определяющей работу. Если при перемещении тела на единицу длины на него действует сила, модуль которой равен единице, а направление совпадает с направлением перемещения ($\alpha = 0$), то и работа равна единице. В международной системе единиц (СИ) при $F = 1$ Н, $|\Delta\vec{r}| = 1$ м и $\alpha = 0°$ совершается работа

$$A = 1\ \text{Н} \cdot 1\ \text{м} = 1\ \text{Н} \cdot \text{м},$$

которая и принимается за единицу работы. Она называется д ж о у л е м (сокращенно: Дж).

Итак, *джоуль — это работа, совершаемая силой* 1 Н *на перемещении* 1 м, *если направления силы и перемещения совпадают.*

Часто используют кратную единицу работы к и л о д ж о у л ь:

$$1 \text{ кДж} = 1000 \text{ Дж}.$$

В системе СГС за единицу работы принимают эрг:

$$1 \text{ эрг} = 1 \text{ дин} \cdot 1 \text{см}.$$

Нетрудно установить соотношение между джоулем и эргом:

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{Н} \cdot 1 \text{ м} = 10^5 \text{ дин} \cdot 100 \text{ см} = 10^7 \text{ эрг}.$$

Иногда применяется внесистемная единица работы к и л о г р а м м-с и л а-м е т р:

$$1 \text{ кгс} \cdot \text{м} = 1 \text{ кгс} \cdot 1 \text{ м} = 9{,}8 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м} = 9{,}8 \text{ Дж}.$$

Приведено определение работы силы $\vec{F}$ при перемещении тела на $\Delta\vec{r}$, составляющем угол α с направлением силы: $A = F|\Delta\vec{r}|\cos\alpha$.

§ 6.3. МОЩНОСТЬ

Очень часто важно знать не только работу, но и время, в течение которого она произведена. Поэтому надо ввести еще одну величину — мощность.

Работа может быть совершена как за большой промежуток времени, так и за очень малый. На практике, однако, далеко не безразлично, быстро или медленно может быть произведена работа. Временем, в течение которого совершается работа, определяют производительность любого двигателя. Очень большую работу может совершить и крошечный электромоторчик, но для этого понадобится много времени. Поэтому наряду с работой вводят величину, характеризующую быстроту, с которой она производится, — м о щ н о с т ь.

Мощностью называют отношение работы A к интервалу времени Δt, за который эта работа совершена:

$$N = \frac{A}{\Delta t}. \tag{6.3.1}$$

Иными словами, мощность численно равна работе, совершенной в единицу времени.

Подставляя вместо работы A ее выражение (6.2.2), получим:

$$N = F\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}\cos\alpha = Fv\cos\alpha = \vec{F} \cdot \vec{v}. \tag{6.3.2}$$

Таким образом, мощность равна произведению модуля вектора силы на модуль вектора скорости и на косинус угла между направлениями этих векторов или скалярному произведению силы на скорость[1].

Мощность можно повысить как за счет увеличения действующих сил, так и за счет увеличения скорости движения.

В СИ мощность выражается в ваттах (Вт). Мощность равна 1 Вт, если работа 1 Дж совершается за 1 с.

Наряду с ваттом используются более крупные (кратные) единицы мощности:

1 гВт (гектоватт) = 100 Вт,

1 кВт (киловатт) = 1000 Вт,

1 МВт (мегаватт) = 1 000 000 Вт.

В системе СГС за единицу мощности принимается 1 эрг/с. Легко найти соотношение между единицами мощности 1 Вт и 1 эрг/с:

1 Вт = 1 Дж/с = 10^7 эрг/с.

До сих пор еще в технике применяют иногда старую внесистемную единицу мощности — лошадиную силу (л. с.):

1 л. с. $\approx$ 735 Вт.

Мощности, развиваемые двигателями, колеблются в огромном диапазоне: от долей ватта до сотен и тысяч мегаватт (для двигателей космических ракет).

Человек без особого напряжения может длительное время развивать мощность порядка 70 Вт. Мощность муравья составляет 10^{-5} Вт.

Мощность численно равна работе, совершаемой в единицу времени.

? 1. Почему при подъеме автомобиля в гору или при движении по песку шофер включает первую скорость?

2. Как скорость движения автомобиля зависит от мощности двигателя, если силу сопротивления движению считать постоянной?

3. Как скорость движения автомобиля зависит от мощности двигателя, если сила сопротивления при больших скоростях прямо пропорциональна квадрату скорости?

---

[1] Если интервал времени Δt стремится к нулю, то выражение (6.3.2) представляет собой мгновенную мощность, определяемую через мгновенную скорость.

§ 6.4. ЭНЕРГИЯ

Если система тел может совершить работу, то мы говорим, что она обладает энергией.

Для совершения работы необходимо, чтобы на движущееся тело все время действовала та или иная сила. Тепловые двигатели обеспечивают действие силы до тех пор, пока не кончается топливо, а электродвигатель — до тех пор, пока к нему подводится ток. Однако эти двигатели представляют собой сложные системы и в механике не изучаются.

Рассмотрим простые системы движущихся тел, взаимодействующих друг с другом посредством сил тяготения и способных в той или иной мере деформироваться. (Пружина или резиновый шнур деформируются значительно, а камень, дерево, металл — столь мало, что их деформациями обычно можно пренебречь.) Будем считать, что никаких химических превращений тел не происходит и что в системе нет заряженных тел и электрических токов.

Тогда легко обнаружить, что поднятые над землей грузы, а также устройства, имеющие сжатые пружины, способны действовать на движущееся тело и совершать работу лишь в течение определенного промежутка времени. Рано или поздно пружина распрямится, а груз опустится на землю и силы перестанут совершать работу.

Совершение работы не проходит для системы тел бесследно. Рассмотрим, например, часы с пружинным заводом. При заводе часов состояние системы (часового механизма) меняется так, что она приобретает способность совершать работу в течение длительного времени. Пружина поддерживает движение всех колес, стрелок и маятника, испытывающих сопротивление движению, вызванное трением. По мере хода часов способность пружины совершать работу постепенно исчерпывается. Состояние пружины меняется.

Подобным образом при совершении работы меняется состояние сжатого газа и скоростей движущихся тел.

Если тело или система тел могут совершать работу, то говорят, что они обладают энергией.

Совершая механическую работу, тело или система тел переходят из одного состояния в другое, в котором их энергия минимальна. Груз опускается, пружина распрямляется, движущееся тело останавливается. При совершении работы энергия постепенно расходуется. Для того чтобы система опять приобрела способность совершать работу, надо изменить ее состояние: увеличить скорости тел, поднять тела вверх или деформировать. Для этого внешние силы должны совершить над системой положительную работу.

Энергия в механике — величина, определяемая состоянием системы — положением тел и их скоростями; изменение энергии при переходе системы из одного состояния в другое равно работе внешних сил.

§ 6.5. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ И ЕЕ ИЗМЕНЕНИЕ

В механике энергия системы тел определяется положением тел и их скоростями. Сначала найдем, как энергия тел зависит от их скоростей.

Вычислим работу силы $\vec{F}$, действующей на тело (материальную точку) массой m, в простом случае, когда тело движется прямолинейно, сила постоянна и ее направление совпадает с направлением скорости. При перемещении тела на $\Delta\vec{r}$ его скорость меняется от значения $\vec{v}_1$ до значения $\vec{v}_2$. Выберем координатную ось X так, чтобы векторы $\vec{F}$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\Delta\vec{r}$ были сонаправлены с этой осью (рис. 6.8). Тогда работа силы

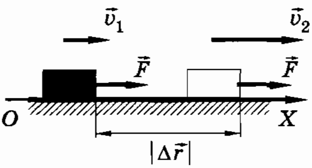


Рис. 6.8

$$A = \vec{F}|\Delta\vec{r}| = F\Delta x. \qquad (6.5.1)$$

Согласно кинематической формуле (1.20.8) перемещение тела при движении с постоянным ускорением равно

$$\Delta x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}.$$

В нашем случае $v_x = v_2$, $v_{0x} = v_1$, $a_x = a$.

Поэтому выражение для работы (6.5.1) примет вид

$$A = F\frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}. \qquad (6.5.2)$$

Согласно второму закону Ньютона $\frac{F}{a} = m$. Следовательно,

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \qquad (6.5.3)$$

Величину, равную половине произведения массы тела на квадрат его скорости, называют кинетической[1] энергией.

Обозначим кинетическую энергию через E_k:

$$\boxed{E_k = \frac{mv^2}{2}.} \tag{6.5.4}$$

Любое движущееся тело обладает энергией, пропорциональной его массе и квадрату скорости.

Учитывая определение кинетической энергии (6.5.4), выражение (6.5.3) для работы можно переписать так:

$$A = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k. \tag{6.5.5}$$

Равенство (6.5.5) выражает теорему об изменении кинетической энергии: **изменение кинетической энергии тела (точнее, материальной точки) за некоторый промежуток времени равно работе, совершенной за это время силой, действующей на тело.**

Кинетическая энергия увеличивается, если работа положительна, и уменьшается при отрицательной работе.

Можно доказать, что теорема (6.5.5) справедлива и в тех случаях, когда на тело действует переменная сила и оно движется по криволинейной траектории.

Кинетическая энергия выражается в тех же единицах, что и работа, т. е. в джоулях.

Так как кинетическая энергия отдельного тела определяется его массой и скоростью, то она не зависит от того, взаимодействует ли это тело с другими телами или нет. Значение кинетической энергии зависит от системы отсчета, как и значение скорости. Кинетическая энергия системы тел равна сумме кинетических энергий отдельных тел, входящих в эту систему.

Существенно, что при доказательстве теоремы об изменении кинетической энергии мы использовали лишь определение работы и второй закон Ньютона. Никаких предположений о характере сил взаимодействия между телами не было сделано. Это могли быть силы тяготения, силы упругости или силы трения.

Движущееся тело обладает кинетической энергией. Эта энергия равна работе, которую надо совершить, чтобы увеличить скорость тела от нуля до значения v.

---

[1] От греческого слова kinema — движение.

§ 6.6. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

Вычислим работу, используя не второй закон Ньютона, а выражение сил взаимодействия между телами в зависимости от расстояний между ними. Это позволит нам ввести понятие потенциальной энергии, зависящей не от скоростей тел, а от расстояний между телами (или от расстояний между частями одного и того же тела).

Так как силы могут быть самыми разнообразными, то нужно рассмотреть различные случаи. Мы ограничимся наиболее простыми.

Потенциальная энергия взаимодействия тела и Земли

Рассмотрим вначале работу внутренних сил системы, состоящей из земного шара и поднятого над поверхностью Земли тела, например камня. При небольших расстояниях от поверхности Земли эту силу можно считать постоянной и равной:

$$\vec{F} = m\vec{g}. \qquad (6.6.1)$$

Сила, действующая на камень, направлена вертикально вниз. Вычислим работу этой силы при перемещении камня вверх вдоль прямой BC (рис. 6.9). Начальная точка B находится на высоте h_1 над Землей, а конечная точка C — на высоте h_2. Ось Y направим вертикально вверх, а ось X вдоль поверхности Земли. Работа

$$A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = mg|\Delta\vec{r}|\cos\alpha = -mg|\Delta\vec{r}|\cos(180° - \alpha) = -mg\Delta y.$$

Так как $\Delta y = h_2 - h_1$ (см. рис. 6.9), то

$$A = -(mgh_2 - mgh_1). \qquad (6.6.2)$$

При движении камня вверх сила тяжести совершает отрицательную работу. Если бы камень двигался вниз, то работа была бы положительной.

Работой силы, действующей на Землю со стороны камня, можно пренебречь, так как перемещение Земли ничтожно мало из-за ее огромной массы[1].

Итак, работу силы тяжести можно представить в виде разности двух значений величины, зависящей от взаимного расположения тела и Земли.

---

[1] Разумеется, это справедливо в системе отсчета, которая не перемещается вдоль оси Y.

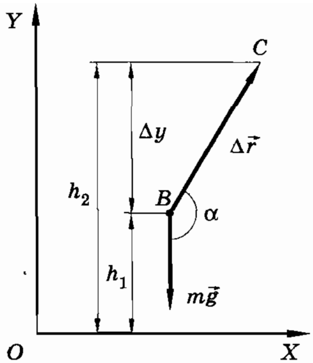


Рис. 6.9

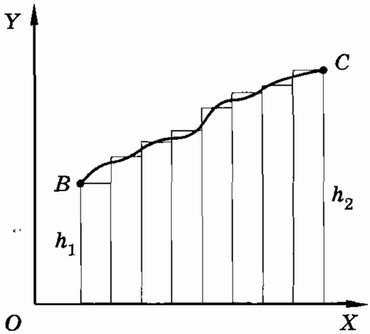


Рис. 6.10

Величину, равную произведению массы m тела на ускорение свободного падения g и высоту h тела над поверхностью Земли, называют потенциальной[1] энергией взаимодействия тела и Земли. Обозначим потенциальную энергию через E_p:

$$\boxed{E_p = mgh.} \qquad (6.6.3)$$

С учетом (6.6.3) выражение для работы (6.6.2) запишется так:

$$A = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\Delta E_p. \qquad (6.6.4)$$

Работа силы тяжести равна изменению потенциальной энергии, взятому с противоположным знаком.

Когда сила тяжести совершает отрицательную работу, то потенциальная энергия увеличивается: $E_{p2} > E_{p1}$. При совершении положительной работы потенциальная энергия, напротив, уменьшается:

$$E_{p2} < E_{p1}.$$

Из выражения (6.6.2) видно, что работа силы тяжести определяется лишь изменением высоты $h_2 - h_1$ тела над поверхностью Земли, но не зависит от перемещения его в горизонтальном направлении. Это справедливо не только для работы при перемещении тела вдоль прямой, но и для работы на произвольном участке пути. В самом деле, если тело перемещается вдоль кривой BC из точки, находящейся над землей на высоте h_1, в точку, лежащую на высоте h_2 (рис. 6.10), то работа вдоль

[1] От латинского слова potentia — возможность.

этой кривой равна работе вдоль ступенчатой линии, состоящей из вертикальных и горизонтальных отрезков малой длины. На горизонтальных отрезках работа равна нулю, а сумма работ на вертикальных отрезках равна работе на вертикальной прямой длиной $h_2 - h_1$. Поэтому работа по-прежнему будет выражаться формулой (6.6.2).

Следовательно, **работа силы тяжести не зависит от формы траектории и определяется только начальным и конечным положением тела.** На замкнутой траектории работа равна нулю, так как изменение потенциальной энергии при этом равно нулю.

Именно *независимость работы силы тяжести от формы траектории, по которой перемещается тело, позволяет ввести понятие потенциальной энергии.*

Работа силы упругости

Вычислим работу, которую совершает растянутая пружина при перемещении прикрепленного к ней тела.

На рисунке 6.11, *а* показана пружина, у которой один конец закреплен неподвижно, а к другому концу прикреплен шар. Если пружина растянута (рис. 6.11, *б*), то она действует на шар с силой $\vec{F}_1$, направленной к положению равновесия шара, в котором пружина не деформирована. Начало отсчета оси X совместим с концом пружины в нерастянутом состоянии.

Вычислим работу силы упругости при перемещении шара из точки с координатой x_1 в точку с координатой x_2. Из рисунка 6.11, *в* видно, что модуль перемещения $|\Delta\vec{r}| = x_1 - x_2$.

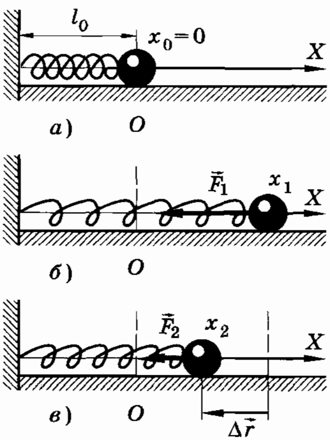


Рис. 6.11

При деформации пружины сила упругости изменяется линейно с изменением координаты: $F = k|x|$. Для вычисления работы воспользуемся графиком зависимости силы от координаты шара (рис. 6.12). Как было показано в § 6.2, работу силы упругости при перемещении $|\Delta\vec{r}| = x_1 - x_2$ можно считать численно равной площади трапеции $BCDM$. Обозначив через F_1 модуль силы упругости в начальном положении шара, а через F_2 — в конечном, получим

$$A = \frac{F_1 + F_2}{2}(x_1 - x_2) = \frac{F_1 + F_2}{2}|\Delta\vec{r}|. \qquad (6.6.5)$$

Величину $\frac{F_1 + F_2}{2}$ можно рассматривать как среднее значение силы, действующей на шар. При линейной зависимости силы от расстояния это среднее значение равно полусумме начального и конечного значений силы.

Теперь рассмотрим два тела, соединенных пружиной и лежащих на гладкой горизонтальной поверхности. Будем считать для простоты, что тела могут перемещаться только вдоль прямой, совпадающей с осью пружины. Модули сил, с которыми взаимодействуют тела, равны:

$$F = k(l - l_0) = k\Delta l, \qquad (6.6.6)$$

где l — расстояние между телами, а l_0 — длина пружины в нерастянутом состоянии.

Пусть в начальном положении длина пружины равна l_1 (рис. 6.13, *а*), а в конечном l_2 (рис. 6.13, *б*) ($l_1 > l_2$). При сокращении пружины на $\Delta l = l_1 - l_2$ первое тело переместится на расстояние Δl_{I}, а второе на расстояние Δl_{II} (см. рис. 6.13, *б*), так что

$$\Delta l = \Delta l_{\mathrm{I}} + \Delta l_{\mathrm{II}}.$$

Согласно формуле (6.6.5) работа силы упругости по перемещению первого тела равна:

$$A_1 = \frac{F_1 + F_2}{2}\Delta l_{\mathrm{I}} = \frac{k}{2}[(l_1 - l_0) + (l_2 - l_0)]\Delta l_{\mathrm{I}}.$$

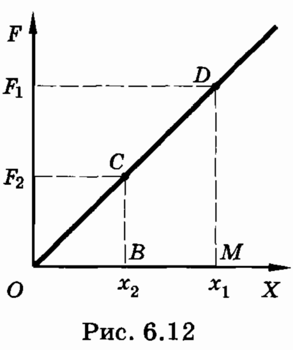


Рис. 6.12

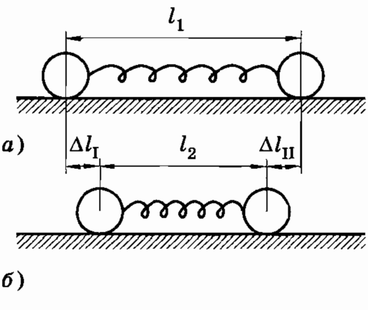


Рис. 6.13

Аналогично работа по перемещению второго тела

$$A_2 = \frac{F_1 + F_2}{2}\Delta l_{II} = \frac{k}{2}[(l_1 - l_0) + (l_2 - l_0)]\Delta l_{II}.$$

Учитывая, что $\Delta l_I + \Delta l_{II} = l_1 - l_2$, приходим к выводу: полная работа внутренних сил системы (сил упругости в данном случае) равна:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{k}{2}[(l_1 - l_0) + (l_2 - l_0)](l_1 - l_0). \qquad (6.6.7)$$

Выражение (6.6.7) нетрудно преобразовать к виду

$$A = \frac{k(\Delta l_1)^2}{2} - \frac{k(\Delta l_2)^2}{2}, \qquad (6.6.8)$$

где $\Delta l_1 = l_1 - l_0$, а $\Delta l_2 = l_2 - l_0$ — деформация пружины в начальном и конечном состояниях[1].

Потенциальная энергия деформированной пружины

Формула (6.6.8) показывает, что работа силы упругости может быть представлена как изменение величины

$$E_p = \frac{k}{2}(l - l_0)^2 = \frac{k(\Delta l)^2}{2}, \qquad (6.6.9)$$

взятое с противоположным знаком.

При сжатии (или растяжении) пружины

$$A = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\left\{\frac{k(\Delta l_2)^2}{2} - \frac{k(\Delta l_1)^2}{2}\right\}. \qquad (6.6.10)$$

Величина E_p в формуле (6.6.9) представляет собой потенциальную энергию тел, взаимодействующих посредством пружины.

Работа сил упругости зависит только от деформации пружины, определяемой начальной и конечной длиной пружины. От формы траектории тел, на которые действует пружина, работа A не зависит, подобно тому как не зависит от формы пути работа сил тяжести. Ведь при перемещении любого тела перпенди-

---

[1] Это легко проверить, если произвести все действия в формулах (6.6.7) и (6.6.8) и сравнить результаты.

кулярно оси пружины, когда ее длина не меняется, работа будет равна нулю, так как при этом сила перпендикулярна перемещению. Работа определяется разностью значений потенциальной энергии в начальном и конечном состояниях.

Заметим, что потенциальная энергия, определяемая выражением (6.6.9), не зависит от свойств тел, которые связывает пружина. Эту энергию следует считать сконцентрированной в пружине.

Консервативные силы

Мы показали, что работа силы тяжести вблизи поверхности Земли и работа сил упругости растянутой пружины не зависят от формы траектории и могут быть представлены как изменения зависящей от координат величины — потенциальной энергии, взятые с противоположным знаком.

Этот результат оказывается справедливым не только для рассмотренных нами сил, но и для любых сил, зависящих от расстояний между телами, но не зависящих от их скоростей. Как мы скоро увидим, механическая энергия, равная сумме кинетической и потенциальной энергий, сохраняется в замкнутой системе лишь в том случае, когда в ней действуют силы, зависящие только от расстояния. Такие силы называются консервативными, т. е. сохраняющимися (вспомните: консервы). Системы, в которых действуют только эти силы, также называют консервативными.

Работа консервативных сил всегда может быть представлена как приращение потенциальной энергии, взятое с противоположным знаком:

$$\boxed{A = -\Delta E_p = -(E_{p2} - E_{p1}).} \qquad (6.6.11)$$

Потенциальная энергия тел, взаимодействующих посредством гравитационных сил

Возможные формы потенциальной энергии не исчерпываются выражениями (6.6.3) и (6.6.9). Так, потенциальная энергия двух тел, взаимодействующих друг с другом посредством сил всемирного тяготения, в общем случае записывается так:

$$E_p = -G\frac{m_1 m_2}{r}, \qquad (6.6.12)$$

где G — гравитационная постоянная.

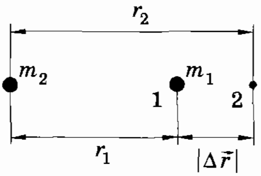


Рис. 6.14

Чтобы обосновать справедливость формулы (6.6.12), решим обратную задачу. Докажем, что, взяв потенциальную энергию в виде (6.6.12), мы получим для силы взаимодействия точечных тел закон всемирного тяготения Ньютона.

Вычислим, используя формулу (6.6.12), работу по перемещению на малое расстояние $|\Delta \vec{r}| = r_2 - r_1$ точечного тела массой m_1, взаимодействующего с неподвижным точечным телом массой m_2 (рис. 6.14). Если $|\Delta \vec{r}|$ мало, то силу $\vec{F}$ взаимодействия тел массами m_1 и m_2 можно считать постоянной. Работа в этом случае равна:

$$A = -|\Delta \vec{r}| = -(E_{p2} - E_{p1}),$$

так как сила и перемещение направлены в противоположные стороны.

Подставляя в эту формулу значение потенциальной энергии (6.6.12), получим:

$$-F|\Delta \vec{r}| = G\frac{m_1 m_2}{r_2} - G\frac{m_1 m_2}{r_1} = -Gm_1 m_2 \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}.$$

Если $|\Delta \vec{r}| << r_2$ и $|\Delta \vec{r}| << r_2$, то $r_1 r_2 \approx r^2$.

Тогда

$$F|\Delta \vec{r}| = G\frac{m_1 m_2}{r^2}|\Delta \vec{r}|.$$

Отсюда

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Допустив, что потенциальная энергия имеет форму (6.6.12), мы пришли к правильному выражению для силы всемирного тяготения.

Можно показать, что выражение для потенциальной энергии $E_p = mgh$ представляет собой частный случай формулы (6.6.12), когда изменение высоты h тела над поверхностью Земли много меньше ее радиуса R.

В самом деле, пусть начальная высота тела массой m над поверхностью Земли равна h_1, а конечная — h_2. Тогда согласно формулам (6.6.11) и (6.6.12) будем иметь:

$$\Delta E_p = -G\frac{Mm}{R + h_2} - G\frac{Mm}{R + h_1} = GMm\frac{h_2 - h_1}{(R + h_1)(R + h_2)}.$$

Так как $R >> h_1$ и $R >> h_2$, то приближенно

$$\Delta E_p = G\frac{Mm}{R^2}(h_2 - h_1).$$

Ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = G\frac{M}{R^2}$. Поэтому

$$\Delta E_p = mgh_2 - mgh_1$$

и, следовательно, $E_p = mgh$.

Работа сил, зависящих только от расстояний между телами системы (но не от их скоростей), не зависит от формы траектории. Поэтому работу можно представить как разность значений некоторой функции, называемой потенциальной энергией, в конечном и начальном состояниях системы. Значение потенциальной энергии зависит от характера действующих сил.

§ 6.7. ЗАМЕЧАНИЯ О ФИЗИЧЕСКОМ СМЫСЛЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

В этом параграфе никакие новые сведения не сообщаются, но подчеркиваются и разъясняются некоторые важные особенности потенциальной энергии, на которые следует обратить внимание.

Потенциальная энергия — энергия взаимодействия тел

Важно отчетливо представлять себе, что кинетическая энергия — величина, относящаяся к одному телу, а потенциальная энергия — это всегда энергия взаимодействия по меньшей мере двух тел (или частей одного тела) друг с другом. Понятие потенциальной энергии относится к системе тел, а не к одному телу. Если в системе имеется несколько тел, то полная потенциальная энергия системы равна сумме потенциальных энергий всех пар взаимодействующих тел (любое тело взаимодействует с каждым из остальных).

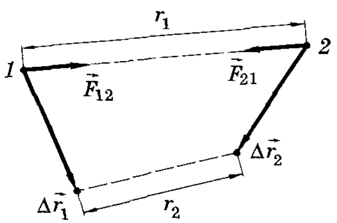


Рис. 6.15

Потенциальная энергия характеризует взаимодействие тел именно потому, что само понятие силы всегда относится к двум телам: к телу, на которое действует сила, и к телу, со стороны которого она действует.

При получении выражения для кинетической энергии мы не использовали эту особенность силы, сразу заменив ее в формуле для работы произведением массы на ускорение согласно второму закону Ньютона. Именно поэтому понятие кинетической энергии относится к одному телу.

Выражение же для потенциальной энергии мы получили с помощью известной зависимости сил от расположения взаимодействующих тел, не используя уравнения движения. Равенство $A = -\Delta E_p$ определяет потенциальную энергию безотносительно к уравнениям движения. Поэтому потенциальная энергия является просто другой характеристикой (наряду с силой) взаимного действия тел друг на друга.

Часто при выводе формулы, связывающей изменение потенциальной энергии с работой сил, одно из тел системы принимают за неподвижное. Так, когда рассматривают падение тела на Землю под действием силы тяжести, то смещением Земли при этом пренебрегают. Поэтому работа сил взаимодействия между Землей и телом сводится к работе только одной силы, действующей на тело.

Или другой пример. Сжатая или растянутая пружина, действующая на тело, обычно закреплена одним концом, и этот конец пружины не перемещается (фактически он скреплен с земным шаром). Работу совершает при этом лишь сила упругости деформированной пружины, приложенная к телу.

Из-за этого потенциальную энергию системы двух тел привыкают рассматривать как энергию одного тела. Это может привести к путанице.

В действительности во всех случаях справедливо следующее утверждение: изменение потенциальной энергии двух тел, взаимодействующих с силами, зависящими только от расстояния между телами, равно работе этих сил, взятой со знаком минус:

$$A = \vec{F}_{12} \cdot \Delta\vec{r}_1 + \vec{F}_{21} \cdot \Delta\vec{r}_2 = -[E_p(r_2) - E_p(r_1)] = -\Delta E_p. \qquad (6.7.1)$$

Здесь $\vec{F}_{12}$ — сила, действующая на тело *1* со стороны тела *2*, а $\vec{F}_{21}$ — сила, действующая на тело *2* со стороны тела *1* (рис. 6.15).

Нулевой уровень потенциальной энергии

Согласно уравнению (6.7.1) работа сил взаимодействия определяет не саму потенциальную энергию, а ее изменение.

Поскольку работа определяет лишь изменение потенциальной энергии, то только изменение энергии в механике имеет физический смысл. Поэтому можно произвольно выбрать состояние системы, в котором ее потенциальная энергия считается равной нулю. Этому состоянию соответствует нулевой уровень потенциальной энергии. Ни одно явление в природе или технике не определяется значением самой потенциальной энергии. Важна лишь разность значений потенциальной энергии в конечном и начальном состояниях системы тел.

Выбор нулевого уровня производится по-разному и диктуется исключительно соображениями удобства, т. е. простотой записи уравнения, выражающего закон сохранения энергии. Обычно в качестве состояния с нулевой потенциальной энергией выбирают состояние системы с минимальной энергией. Тогда потенциальная энергия всегда положительна.

У пружины потенциальная энергия минимальна в отсутствие деформации, а у камня — когда он лежит на поверхности Земли. Поэтому в первом случае $E_p = \frac{k(\Delta l)^2}{2}$ (рис. 6.16), а во втором случае $E_p = mgh$ (рис. 6.17). Но к данным выражениям можно добавить любую постоянную величину C, и это ничего не изменит. Можно считать, что $E_p = \frac{k(\Delta l)^2}{2} + C$ и $E_p = mgh + C$.

Если во втором случае положить $C = -mgh_0$, то это будет означать, что за нулевой уровень энергии принята энергия на высоте h_0 над поверхностью Земли.

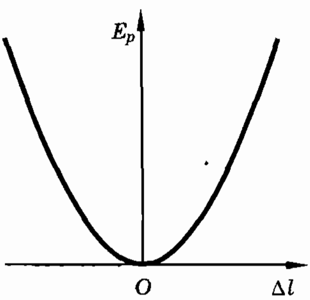


Рис. 6.16

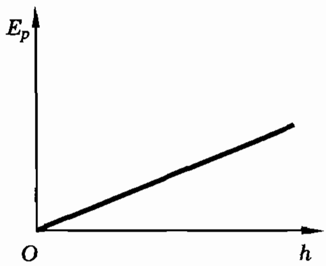


Рис. 6.17

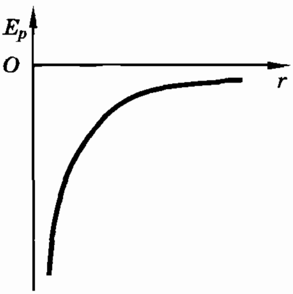


Рис. 6.18

Иногда невозможно выбрать нулевой уровень потенциальной энергии так, чтобы минимальная энергия равнялась нулю. Так, например, потенциальную энергию двух тел, взаимодействующих посредством сил всемирного тяготения, можно записать так:

$$E_р = -G\frac{m_1 m_2}{r} + C.$$

При $r \to 0$ первое слагаемое стремится к $-\infty$. Поэтому минимальное значение энергии можно считать равным нулю лишь при $C = \infty$. Но пользоваться уравнениями, в которые входит бесконечная величина, разумеется, нельзя. Поэтому здесь удобнее положить $C = 0$ и тем самым за нулевой уровень принять потенциальную энергию в состоянии, когда тела бесконечно удалены друг от друга ($r = \infty$). Тогда нулевому уровню будет соответствовать не минимальная энергия, а максимальная. При любом конечном значении r потенциальная энергия отрицательна (рис. 6.18).

Независимость потенциальной энергии от выбора системы отсчета

Заметим еще раз, что понятие потенциальной энергии имеет смысл для таких систем, в которых силы взаимодействия консервативны, т. е. зависят лишь от расстояния между телами или их частями. Соответственно и потенциальная энергия зависит от расстояния между телами или их частями: от высоты камня над поверхностью Земли, от длины пружины, от расстояния между точечными телами. От координат тел потенциальная энергия непосредственно не зависит. (Лишь постольку, поскольку расстояния являются функциями координат, можно говорить о зависимости от координат.) Отсюда следует очень важный вывод, на который обычно не обращают внимания. Так как расстояния во всех системах отсчета, движущихся и неподвижных, одни и те же, потенциальная энергия не зависит от выбора системы отсчета[1].

---

[1] Потенциальная энергия зависит от выбора нулевого уровня потенциальной энергии, а это совсем другое, чем зависимость от выбора системы отсчета.

Но как же это может быть? Ведь $\Delta E_p = -A$, а работа зависит от выбора системы отсчета. Вот здесь-то и проявляется отчетливо тот факт, что потенциальная энергия есть энергия взаимодействия двух тел, а ее изменение определяется работой сил, действующих на оба тела. При переходе от неподвижной системы к движущейся меняются работы обеих сил, но суммарная работа остается неизменной. В самом деле, если в некоторой системе отсчета за время Δt совершается работа

$$A_1 = \vec{F}_{12} \cdot \Delta\vec{r}_1 + \vec{F}_{21} \cdot \Delta\vec{r}_2,$$

то в другой системе, движущейся относительно первой, работа равна

$$A_2 = \vec{F}_{12} \cdot (\Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_0) + \vec{F}_{21} \cdot (\Delta\vec{r}_2 + \Delta\vec{r}_0),$$

где $\Delta\vec{r}_0$ — перемещение систем отсчета друг относительно друга за время Δt.

Так как по третьему закону Ньютона $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, то

$$\vec{F}_{12} \cdot \Delta\vec{r}_0 + \vec{F}_{21} \cdot \Delta\vec{r}_0 = 0.$$

Следовательно, $A_1 = A_2$.

Различия между потенциальной и кинетической энергией

Кинетическая энергия зависит только от скоростей тел, а потенциальная — только от расстояний между ними.

Далее, положительная работа внутренних сил всегда приводит к увеличению кинетической энергии, но обязательно уменьшает энергию потенциальную:

$$\Delta E_k = A, \text{ но } \Delta E_p = -A.$$

Кинетическая энергия всегда положительна, а потенциальная энергия может быть как положительной, так и отрицательной.

Изменение кинетической энергии всегда равно работе действующих на тело сил, а изменение потенциальной энергии равно (со знаком минус) работе только консервативных сил (но не сил трения, зависящих от скорости).

И потенциальная и кинетическая энергии являются функциями состояния системы, т. е. они точно определены, если известны координаты и скорости всех тел системы.

§ 6.8. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ В МЕХАНИКЕ

В замкнутой системе тел положительная работа внутренних сил увеличивает кинетическую энергию и уменьшает потенциальную. Отрицательная работа, напротив, увеличивает потенциальную энергию и уменьшает кинетическую. Именно благодаря этому выполняется закон сохранения энергии.

Снова обратимся к уже рассматривавшейся простой системе тел, состоящей из земного шара и поднятого над поверхностью Земли тела, например камня.

Под действием силы тяжести камень падает вниз. Силу сопротивления воздуха учитывать не будем. Работа, совершаемая силой тяжести при перемещении камня из одной точки в другую, равна изменению (увеличению) кинетической энергии камня:

$$A = \Delta E_k. \qquad (6.8.1)$$

В то же время эта работа равна уменьшению потенциальной энергии:

$$A = -\Delta E_p. \qquad (6.8.2)$$

Так как в выражениях (6.8.1) и (6.8.2) левые части одинаковы, то равны между собой и правые части:

$$\Delta E_k = -\Delta E_p. \qquad (6.8.3)$$

Равенство (6.8.3) означает, что увеличение кинетической энергии системы равно убыли ее потенциальной энергии (или наоборот). Отсюда вытекает, что

$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0,$$

или

$$\Delta(E_k + E_p) = 0. \qquad (6.8.4)$$

Изменение суммы кинетической и потенциальной энергий равно нулю.

Величину *E*, равную сумме кинетической и потенциальной энергий системы, называют механической энергией системы:

$$E = E_k + E_p. \qquad (6.8.5)$$

Так как изменение полной энергии, согласно (6.8.4), равно нулю, то энергия остается постоянной:

$$\boxed{E = E_k + E_p = \text{const.}} \qquad (6.8.6)$$

Таким образом, **в замкнутой системе, в которой действуют консервативные силы, механическая энергия сохраняется.** В этом состоит з а к о н с о х р а н е н и я э н е р г и и. Энергия не создается и не уничтожается, а только превращается из одной формы в другую: из кинетической в потенциальную или наоборот.

Учитывая, что в рассматриваемом конкретном случае $E_k = \frac{mv^2}{2}$ и $E_p = mgh$, можно закон сохранения энергии записать так:

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = \text{const},$$

или

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2. \qquad (6.8.7)$$

Это уравнение позволяет очень просто находить скорость камня v_2 на любой высоте h_2 над Землей, если известна начальная скорость v_1 камня на исходной высоте h_1.

Закон сохранения энергии (6.8.6) обобщается для любого числа тел и любых консервативных сил взаимодействия между ними. Под E_k нужно понимать сумму кинетических энергий всех тел, а под E_p — полную потенциальную энергию системы.

Для системы, состоящей из двух тел массами m_1 и m_2 и пружины (см. рис. 6.13), закон сохранения энергии имеет вид:

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + \frac{k(\Delta l)^2}{2} = \text{const.} \qquad (6.8.8)$$

Полная механическая энергия равна сумме кинетической и потенциальной энергий. В замкнутой системе, в которой действуют только консервативные силы, механическая энергия сохраняется.

§ 6.9. ИЗМЕНЕНИЕ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНИХ СИЛ

Докажем, что в рассматриваемой системе изменение энергии равно работе внешних сил.

Пусть рассмотренная нами система из двух тел — Земли и камня — незамкнута. На камень действует внешняя сила $\vec{F}$. Происхождение этой силы не имеет значения. Это может быть, в частности, сила упругости привязанной к камню веревки (рис. 6.19). Тогда согласно второму закону Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g}. \qquad (6.9.1)$$

За некоторый промежуток времени камень совершит перемещение $\Delta\vec{r}$, направленное вверх. Умножая обе части уравнения (6.9.1) скалярно на $\Delta\vec{r}$, получим:

$$m\vec{a} \cdot \Delta\vec{r} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} + m\vec{g} \cdot \Delta\vec{r},$$

или

$$m\vec{a} \cdot \Delta\vec{r} - m\vec{g} \cdot \Delta\vec{r} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}. \qquad (6.9.2)$$

Первое слагаемое слева есть изменение кинетической энергии камня. Действительно, при совпадении направлений векторов $\vec{a}$ и $\Delta\vec{r}$ получим (см. § 6.5):

$$m\vec{a} \cdot \Delta\vec{r} = ma|\Delta\vec{r}| = ma\frac{v_2^2 - v_1^2}{2a} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \Delta E_k.$$

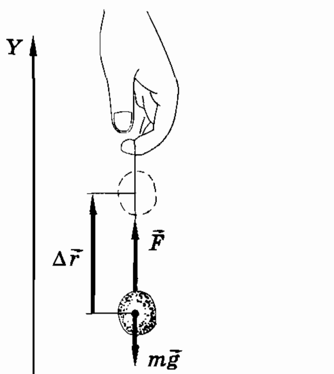


Рис. 6.19

Второе слагаемое уравнения (6.9.2) есть изменение потенциальной энергии: $\Delta E_p = -mg|\Delta\vec{r}|$. Обратите внимание: изменение потенциальной энергии системы равно работе только внутренних сил взаимодействия системы Земля — камень, но не работе внешних сил. Работа внешней силы определяется правой частью уравнения (6.9.2).

Поэтому равенство (6.9.2) можно записать так:

$$\Delta E_k + \Delta E_p = \Delta E = A_{вн}, \qquad (6.9.3)$$

где $E = E_k + E_p$.

Изменение полной механической энергии равно работе внешних сил.

Полученный вывод имеет общий характер. Можно показать, что он справедлив для любого числа тел, взаимодействующих посредством консервативных сил.

Внешние силы не меняют потенциальную энергию системы

Подробное рассмотрение частного случая (системы Земля—камень) показывает, что внешние силы изменяют (совместно с работой внутренних сил) лишь кинетическую энергию системы. Потенциальную энергию системы они непосредственно не меняют. Изменение потенциальной энергии системы всегда определяется работой внутренних сил. Этот вывод имеет общее значение. Конечно, внешние силы изменяют расположение тел системы, и за счет этого меняется потенциальная энергия системы. Но если бы в системе не действовали консервативные силы, то потенциальная энергия не менялась бы.

Работа системы над внешними телами

Работа силы, действующей на тело [см. формулу (6.2.1)], определяется силой и перемещением тела. Но рассматриваемое тело, согласно третьему закону Ньютона, действует на другое тело (или тела), и при этом тоже может совершаться работа. Однако вычислить эту работу мы не можем, так как не знаем перемещения других тел.

Нередко встречающееся утверждение о том, что работа внешних сил над системой равна работе A' сил системы над внешними телами с противоположным знаком

$$A_{вн} = -A', \qquad (6.9.4)$$

не может быть верным во всех случаях.

Так будет лишь при условии, что тела рассматриваемой системы и внешние тела совершают одинаковые перемещения. А это имеет место далеко не всегда. Силы по третьему закону Ньютона обязательно равны по модулю и противоположны по направлению, но перемещения не обязательно должны быть равными.

В качестве примера рассмотрим две простейшие системы: земной шар (первая система) и падающий на него камень (вто-

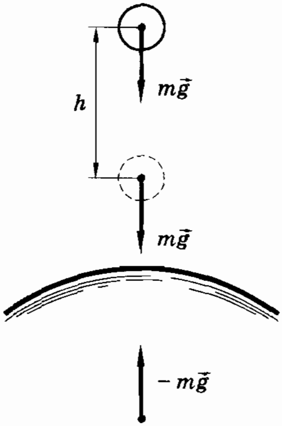


Рис. 6.20

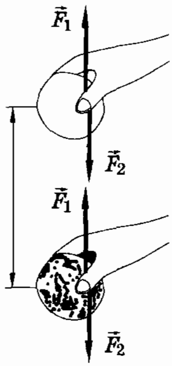


Рис. 6.21

рая система)[1]. Тогда силы тяготения и для Земли и для камня будут считаться внешними силами. Сила тяжести, приложенная к камню, совершит работу $A_{вн} = mgh$, а сила, приложенная к Земле, никакой работы не совершит, так как земной шар не смещается (рис. 6.20): $A' = 0$.

Иное дело, если камень поднимают, например, рукой (рис. 6.21). Тогда работа внешней силы $\vec{F}_1$, приложенной к камню, равна и противоположна по знаку работе силы $\vec{F}_2$, приложенной к руке со стороны камня.

Точно так же работа, которую совершает двигатель, связанный ременной передачей со станком, равна по абсолютному значению и противоположна по знаку работе, совершаемой станком над двигателем.

Работа внешних сил меняет кинетическую, а значит, и полную энергию системы. Потенциальная энергия системы меняется только за счет работы внутренних сил.

§ 6.10. СТОЛКНОВЕНИЕ УПРУГИХ ШАРОВ

Применим закон сохранения энергии для нахождения скорости двух шаров после центрального абсолютно упругого удара.

---

[1] Мы можем любую группу тел или одно тело считать рассматриваемой системой. Это вопрос удобства.

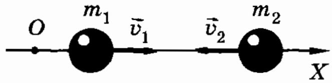


Рис. 6.22

Под абсолютно упругим ударом понимают такой удар, при котором механическая энергия сохраняется[1]. Если начальные скорости шаров направлены по линии, соединяющей их центры (рис. 6.22), то удар называют центральным.

Для абсолютно неупругого удара скорости шаров после удара можно найти с помощью закона сохранения импульса (см. гл. 5). При упругом ударе этого закона недостаточно, так как шары после удара будут иметь различные скорости. Значит, нужно еще одно уравнение, которое дает закон сохранения энергии.

Обозначим массы шаров через m_1 и m_2, их скорости до удара через $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, а после удара через $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_1$. Закон сохранения импульса в проекциях на ось X будет иметь следующий вид:

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}. \qquad (6.10.1)$$

Закон сохранения энергии запишется так:

$$\frac{m_1 v_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2x}^2}{2} = \frac{m_1 u_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 u_{2x}^2}{2}. \qquad (6.10.2)$$

Нами получена система двух уравнений с двумя неизвестными u_{1x} и u_{2x}. Для решения этой системы ее удобно переписать так:

$$m_1(u_{1x} - v_{1x}) = m_2(v_{2x} - u_{2x}), \qquad (6.10.3)$$

$$m_1(u_{1x}^2 - v_{1x}^2) = m_2(v_{2x}^2 - u_{2x}^2). \qquad (6.10.4)$$

Разделив почленно второе уравнение на первое, получим:

$$u_{1x} + v_{1x} = u_{2x} + v_{2x}. \qquad (6.10.5)$$

Умножив обе части этого уравнения на m_2 и сложив полученный результат почленно с уравнением (6.10.3), приходим к выражению:

$$u_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1x} + 2m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}. \qquad (6.10.6)$$

---

[1] Для этого необходимо, чтобы силы взаимодействия между телами зависели только от деформаций, но не от скоростей их движения друг относительно друга.

Применив аналогичный прием, получим выражение для проекции скорости $\vec{u}_2$:

$$u_{2x} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2x} + 2m_1 v_{1x}}{m_1 + m_2}. \qquad (6.10.7)$$

Применим эти формулы для двух частных случаев.

1. Второй шар до удара покоился ($v_{2x} = 0$), тогда

$$u_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1x}}{m_1 + m_2}, \; u_{2x} = \frac{2m_1 v_{1x}}{m_1 + m_2}. \qquad (6.10.8)$$

При $m_1 > m_2$ первый шар продолжает двигаться в том же направлении, что и до удара, но с меньшей скоростью. Если $m_1 < m_2$, то первый шар отскакивает после удара назад. Второй шар в обоих случаях будет двигаться в ту же сторону, куда двигался до удара первый шар.

2. Оба шара имеют одинаковую массу, тогда

$$u_{1x} = \frac{2mv_{2x}}{2m} = v_{2x}, \; u_{2x} = \frac{2mv_{1x}}{2m} = v_{1x}.$$

Шары при соударении обмениваются скоростями. Проверьте на опыте справедливость этих выводов.

Рассмотрено центральное столкновение абсолютно упругих шаров. Полученные формулы справедливы не только для столкновения макроскопических тел, но и в широких пределах для атомов и элементарных частиц.

§ 6.11. УМЕНЬШЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ ТРЕНИЯ

До сих пор мы избегали говорить о работе сил трения. Сейчас мы увидим, как влияет работа сил трения на изменение механической энергии.

Если в замкнутой системе силы трения совершают работу при движении тел друг относительно друга, то механическая энергия не сохраняется. В этом легко убедиться, толкнув книгу, лежащую на горизонтальном столе. Из-за действия силы трения книга почти сразу остановится. Сообщенная ей механическая энергия исчезнет. Сила трения совершает отрицательную работу и уменьшает кинетическую энергию. Но потенциальная энергия тела при этом не увеличивается. Поэтому полная механическая энергия убывает. Кинетическая энергия не превращается в потенциальную.

Силы трения неконсервативны

Причина особой роли сил трения состоит в том, что работа этих сил не связана с изменением (уменьшением или увеличением) потенциальной энергии системы. Силы трения зависят не от расстояний между телами, а от их скоростей. Поэтому работа сил трения не связана определенным образом с изменением расположения тел.

Отличие сил трения от консервативных сил становится особенно наглядным, если рассмотреть работу тех и других на замкнутом пути. Работа силы тяжести, например, на замкнутом пути всегда равна нулю. Она положительна при падении тела с высоты h и отрицательна при подъеме на ту же высоту. Работа же силы сопротивления воздуха отрицательна как при подъеме тела вверх, так и при движении его вниз. Поэтому на замкнутом пути она обязательно меньше нуля.

Когда медленно передвигают стол из одного угла комнаты в другой, а затем снова возвращают его на место, совершают положительную работу, отличную от нуля. Эта работа как раз равна по модулю отрицательной работе сил трения, действующих на ножки стола со стороны пола на замкнутом пути. Соответственно работа сил трения зависит от формы траектории и не определяется лишь начальным и конечным положениями тела. Силы трения неконсервативны.

Действие сил трения в замкнутой системе

Отрицательная работа сил трения уменьшает кинетическую энергию тел, как и отрицательная работа консервативных сил, но она не приводит к увеличению потенциальной энергии. В результате полная механическая энергия системы убывает.

Поэтому если в системе действуют силы трения, то работа этих сил должна учитываться точно так же, как и работа внешних сил, несмотря на то что силы трения могут быть внутренними. Для замкнутой системы, в которой между телами действуют силы трения, изменение энергии равно работе сил трения:

$$E_2 - E_1 = A_{тр}. \qquad (6.11.1)$$

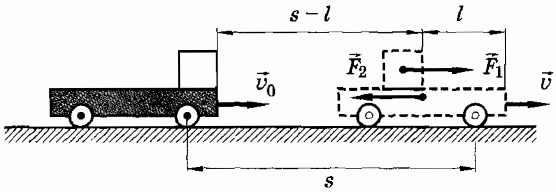


Рис. 6.23

Хотя силы трения могут совершать и положительную работу, суммарная работа сил трения внутри системы всегда отрицательна. Понять, почему это так, можно на простом примере.

Найдем изменение кинетической энергии в системе, состоящей из тележки массой M, движущейся без трения со скоростью $\vec{v}_0$ по гладкой горизонтальной поверхности, и кирпича массой m, положенного на тележку в начальный момент времени (рис. 6.23). Пусть кирпич сначала скользит по тележке и проходит относительно нее расстояние l. После этого кирпич движется вместе с тележкой. Коэффициент трения между кирпичом и тележкой равен μ.

За время t тележка пройдет относительно Земли путь s, а скользящий по ней кирпич пройдет путь $s - l$. После этого они будут двигаться с одинаковой скоростью $\vec{v}$.

Сила трения скольжения, равная по модулю $F_1 = \mu mg$, совершит над кирпичом положительную работу, которая увеличит кинетическую энергию кирпича:

$$A_1 = \mu mg(s - l) = \Delta E_{k1} = \frac{mv^2}{2}.$$

Работа силы трения $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, действующей на тележку, будет отрицательной, что вызовет уменьшение кинетической энергии тележки:

$$A_2 = -\mu mgs = \Delta E_k = \frac{Mv^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2}.$$

Складывая почленно эти уравнения, получим:

$$\frac{(m + M)v^2}{2} - \frac{Mv_0^2}{2} = \mu mgl.$$

Убыль кинетической энергии системы равна работе силы трения на пути, равном относительному перемещению кирпича и тележки. Этот вывод имеет общее значение. Работа двух сил, осуществляющих взаимодействие между телами, не зависит от системы отсчета (см. § 6.7). Всегда можно перейти к системе отсчета, относительно которой одно из тел покоится. В этой системе отсчета работа силы трения, действующей на движущееся тело, всегда отрицательна, так как сила трения направлена против относительной скорости. Но она отрицательна и в любой другой системе отсчета.

Следовательно, **работа сил трения, действующих внутри системы, всегда отрицательна и механическая энергия в замкнутой системе убывает:**

$$\Delta E = A_{\text{тр}} < 0. \qquad (6.11.2)$$

В любой системе, состоящей из больших макроскопических тел, действуют силы трения. Поэтому в замкнутой системе механическая энергия обязательно убывает: постепенно затухают колебания маятника, останавливается машина с выключенным двигателем и т. д.

О правильном понимании простых вещей

В связи с этим может возникнуть такой вопрос. Известно, что сила трения может поднять кирпич на движущемся с постоянной скоростью транспортере. Не означает ли это, что работа силы трения увеличивает потенциальную энергию системы кирпич — Земля?

Конечно нет! Ведь сила трения неконсервативна и поэтому не может увеличивать потенциальную энергию.

В данном случае положительная работа силы трения равна отрицательной работе составляющей силы тяжести вдоль наклонной ленты транспортера. Из-за этого кинетическая энергия кирпича не меняется. Потенциальная же энергия кирпича растет, так как сила взаимодействия между Землей и кирпичом, т. е. сила тяжести, совершает отрицательную работу.

Работа силы трения и автомобиль

Остановимся еще на одном примере довольно неожиданной ситуации, связанной с работой силы трения.

Пусть автомобиль сначала покоится, а затем начинает разгон. Единственной внешней силой, сообщающей автомобилю ускорение, является сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$ (если нет пробуксовки), действующая на ведущие колеса.

Изменение импульса автомобиля равно импульсу силы трения покоя. Казалось бы, и изменение кинетической энергии автомобиля равно работе силы трения. Но это не так: сила трения покоя ускоряет автомобиль, но никакой работы при этом не совершает.

Ведь точка приложения силы трения, действующей на ведущее колесо автомобиля, не перемещается. В любой момент точка соприкосновения колеса с дорогой покоится относительно дороги в системе отсчета, связанной с дорогой. При движении автомобиля она исчезает в одной точке и сразу же появляется в соседней.

Равенство нулю работы силы трения ясно и из того, что мощность $N = \vec{F}_{тр} \cdot \vec{v}$, а мгновенная скорость $\vec{v}$ нижней точки колеса в любой момент равна нулю.

Дело здесь в том, что теорема об изменении кинетической энергии (см. § 6.5) применима к материальной точке (или к системе тел, потенциальная энергия которых не меняется). В случае с автомобилем это не так.

Для пояснения рассмотрим чисто механическую систему: игрушечный автомобиль с пружинным заводом. Вначале пружина заведена и ее потенциальная энергия $E_{p1} = \frac{k(\Delta l)^2}{2}$ отлична от нуля. Кинетическая энергия равна нулю, и полная начальная энергия автомобиля $E_1 = E_{p1}$. В конечном состоянии, когда деформация пружины исчезнет, потенциальная энергия $E_{p2} = 0$, а кинетическая энергия $E_{k2} = \frac{mv^2}{2}$. Полная энергия $E_2 = E_{k2}$. Согласно закону сохранения энергии

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{mv^2}{2} - \frac{k(\Delta l)^2}{2} = A_{тр},$$

где $A_{тр}$ — работа внешних сил. Но эта работа равна нулю и, следовательно,

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{k(\Delta l)^2}{2}.$$

Если колеса проскальзывают, то $A_{тр} < 0$, так как точка соприкосновения колес с землей движется против направления силы трения. Поэтому

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{k(\Delta l)^2}{2} + A_{тр}.$$

Так как $A_{тр} < 0$, то кинетическая энергия автомобиля в конечном состоянии меньше, чем в отсутствие проскальзывания.

Переход механической энергии в другие формы

Убывание механической энергии не означает, что эта энергия исчезает бесследно. В действительности происходит переход энергии из механической формы в другие. Обычно при работе сил трения скольжения тела нагреваются, или, как говорят, увеличивается их внутренняя энергия. Нагревание при действии сил трения легко обнаружить. Для этого, например, достаточно энергично потереть монету о стол. С повышением температуры увеличивается кинетическая энергия теплового движения молекул. Следовательно, при действии сил трения кинетическая энергия тела, движущегося как целое, превращается в кинетическую энергию хаотически движущихся молекул.

В двигателях внутреннего сгорания, паровых турбинах, электродвигателях и т. д. механическая энергия появляется за счет убыли энергии других форм: химической, электрической и т. д.

При действии в системе тел сил трения механическая энергия убывает. Происходит превращение механической энергии в другие формы.

§ 6.12. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

При решении задач данного параграфа используется наряду с другими соотношениями механики закон сохранения энергии.

При применении закона сохранения энергии надо прежде всего выяснить, какое состояние системы целесообразно считать начальным, а какое конечным. Затем записать начальную энергию системы и приравнять ее конечной. При записи потенциальной энергии надо предварительно выбрать нулевой уровень потенциальной энергии в наиболее удобной форме.

Если система не замкнута, то изменение энергии равно работе внешних сил. Работа сил трения всегда рассматривается как работа внешних сил, так как при действии внутри системы сил трения механическая энергия не сохраняется. Не сохраняется она и при неупругом ударе.

Надо помнить, что работа и кинетическая энергия зависят от системы отсчета, а потенциальная энергия не зависит.

Задача 1

Трактор массой $m = 980$ кг, развивающий мощность $N = 20$ л. с., поднимается в гору с постоянной скоростью $v = 5$ м/с. Определите угол α наклона горы к горизонту. Силу сопротивления движению не учитывать.

Решение. Мощность двигателя $N = \vec{F} \cdot \vec{v}$. Сила тяги $\vec{F}$ равна по модулю составляющей силы тяжести, параллельной плоскости, так как движение равномерное: $F = mg\sin\alpha$. Следовательно,

$$N = mgv\sin\alpha.$$

Отсюда

$$\sin\alpha = \frac{N}{mgv} \approx 0{,}3, \quad \alpha \approx 17°.$$

Задача 2

Ящик с песком, имеющий массу M, подвешен на тросе длиной l. Длина троса значительно больше размеров ящика (баллистический маятник). Пуля массой m летит горизонтально и застревает в ящике. Трос после попадания пули отклоняется на угол α от вертикали. Определите модуль скорости пули $\vec{v}_0$.

Решение. Скорость ящика $\vec{u}$ сразу после попадания в него пули найдем с помощью закона сохранения импульса, записав его в проекциях на ось X (рис. 6.24, *а*, *б*):

$$mv_0 = (m + M)u.$$

Механическая энергия при этом не сохраняется, так как соударение неупругое.

Отсюда

$$u = \frac{mv_0}{m + M}. \tag{6.12.1}$$

Согласно закону сохранения энергии кинетическая энергия ящика с пулей сразу после попадания пули в ящик равна по-

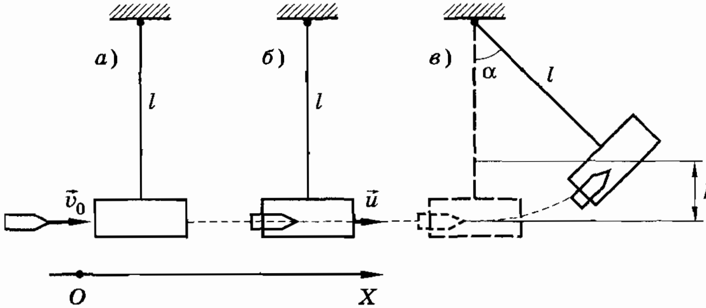


Рис. 6.24

тенциальной энергии в момент максимального отклонения маятника от положения равновесия:

$$\frac{m + M}{2} u^2 = (m + M)gh, \qquad (6.12.2)$$

где h — высота, на которую поднимается ящик с пулей (рис. 6.24, *в*).

Из уравнения (6.12.2) имеем:

$$u = \sqrt{2gh}. \qquad (6.12.3)$$

Высоту h можно найти по длине троса и углу отклонения маятника от положения равновесия (см. рис. 6.24, *в*):

$$h = l - l\cos\alpha = 2l\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (6.12.4)$$

Из выражений (6.12.4), (6.12.3) и (6.12.1) получим:

$$v_0 = \frac{2(m + M)}{m}\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Задача 3

Две пластины, массы которых равны m_1 и m_2, скреплены между собой пружиной (рис. 6.25, а). С какой силой F нужно давить на верхнюю пластину, чтобы, двигаясь вверх после прекращения действия силы, верхняя пластина приподняла нижнюю?

Решение. Пусть верхняя пластина занимает положение 1 при недеформированной пружине, а положение 3 соответствует подъему пластины на максимальную высоту (рис. 6.25, *б*, справа) при условии, что нижняя пластина еще не оторвалась от плоскости.

Нижняя пластина приподнимается, если действующая на нее сила упругости больше силы притяжения ее к Земле: $kx_2 > m_2g$. Здесь x_2 — деформация пружины в момент, когда верхняя пластина достигает максимальной высоты.

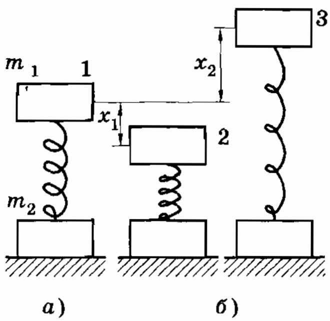


Рис. 6.25

Для того чтобы пружина растянулась на величину x_2, ее необходимо сжать на величину x_1 (положение 2 на рисунке 6.25, *б*, слева), которая может быть найдена из закона сохранения энергии:

$$\frac{kx_1^2}{2} = \frac{kx_2^2}{2} + m_1g(x_1 + x_2).$$

Здесь мы приняли, что в положении 2 потенциальная энергия взаимодействия с Землей верхней пластины равна нулю.

Преобразуем это уравнение к более простому виду:

$$\frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2) = \frac{k}{2}(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + m_1g(x_1 + x_2).$$

После деления правой и левой частей уравнения на $x_1 + x_2$ получим:

$$kx_1 = kx_2 + 2m_1g.$$

Так как $kx_2 > m_2g$, то

$$x_1 > \frac{2m_1g}{k} + \frac{m_2g}{k}.$$

Чтобы сжать пружину на величину x_1, необходимо к весу верхней пластины m_1g добавить силу F, удовлетворяющую равенству:

$$F + m_1g = kx_1.$$

Подставляя сюда найденное значение x_1, получим искомую силу:

$$F > m_1g + m_2g.$$

Задача 4

Вычислите вторую космическую скорость v_{II} (наименьшую скорость, которую нужно сообщить телу, чтобы оно, преодолев гравитационное притяжение Земли, удалилось от нее на бесконечно большое расстояние).

Решение. Если тело массой m приобрело у поверхности Земли скорость v_0, а на расстоянии R от центра Земли имеет скорость v, то, согласно закону сохранения энергии (сопротивление воздуха не учитываем),

$$\frac{mv_0^2}{2} - G\frac{mM}{R_З} = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{R}.$$

Здесь M и $R_З$ — соответственно масса и радиус Земли. Когда тело удаляется от Земли на бесконечно большое расстояние ($R \to$

$\to \infty$), то скорость v_0 будет наименьшей (т. е. $v_0 = v_{II}$) при $v = 0$. Следовательно,

$$\frac{mv_{II}^2}{2} - G\frac{mM}{R_З} = 0.$$

Отсюда

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R_З}} = \sqrt{2gR_З} = v_I\sqrt{2} \approx 11{,}2 \text{ км/с}$$

(v_I — первая космическая скорость).

Задача 5

Шарик, движущийся со скоростью $\vec{v}$, налетает на стенку, которая движется навстречу шарику со скоростью $\vec{u}$ (рис. 6.26). Происходит упругий удар. Определите скорость шарика после удара. Массу стенки считать бесконечно большой.

Решение. Проще всего решить эту задачу, рассматривая соударение шарика в системе отсчета, связанной со стенкой. В этой системе отсчета проекция скорости шарика на координатную ось X системы координат, связанной со стенкой, равна $v + u$, если ось X направлена горизонтально слева направо (рис. 6.26). После удара в этой системе отсчета проекция скорости шарика станет равной $-(v + u)$. Проекция скорости $\vec{v}_а$ шарика после удара относительно неподвижной системы отсчета, согласно закону сложения скоростей, равна:

$$v_{ax} = -(v + u) - u = -(v + 2u).$$

Модуль скорости $v_а = v + 2u$.

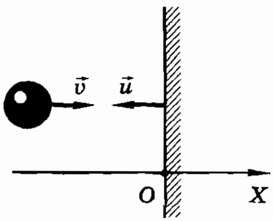


Рис. 6.26

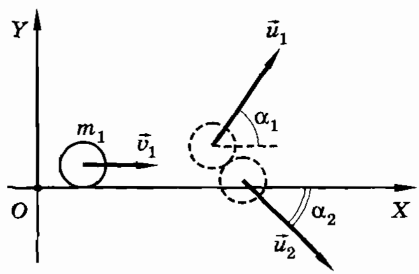


Рис. 6.27

Задача 6

Частица массой m_1 налетает со скоростью $\vec{v}_1$ на покоящуюся частицу, масса которой $m_2 = 3m_1$. Происходит абсолютно упругое нецентральное соударение, после которого вторая частица начинает двигаться под углом $\alpha_2 = 45°$ к первоначальному направлению движения первой частицы. Найдите модули скоростей обеих частиц и направление скорости первой частицы после соударения.

Решение. Выберем ось X так, чтобы ее направление совпадало с направлением скорости $\vec{v}_1$, а ось Y была перпендикулярна этому направлению (рис. 6.27).

Скорости частиц после взаимодействия обозначим через $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$. Направление скорости $\vec{u}_1$ изобразим ориентировочно, так как точное направление нам неизвестно.

Неизвестные скорости, как обычно, находим, определяя их проекции на оси координат. Эти проекции можно определить с помощью законов сохранения импульса и энергии. Согласно закону сохранения импульса:

$$m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2.$$

Запишем это уравнение в проекциях на оси X и Y:

$$m_1v_1 = m_1u_{1x} + 3m_1u_2\cos\alpha_2,$$
$$0 = m_1u_{1y} - 3m_1u_2\sin\alpha_2.$$

Отсюда

$$u_{1x} = v_1 - \frac{3}{2}\sqrt{2}\,u_2,\ u_{1y} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\,u_2. \qquad (6.12.5)$$

Для модуля скорости $\vec{u}_1$ имеем:

$$u_1 = \sqrt{u_{1x}^2 + u_{1y}^2} = \sqrt{v_1^2 - 3\sqrt{2}v_1u_2 + 9u_2^2}. \qquad (6.12.6)$$

Теперь применим закон сохранения энергии. В данном случае сохраняется кинетическая энергия частиц:

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}. \qquad (6.12.7)$$

Подставив (6.12.6) в (6.12.7) и учитывая, что $m_2 = 3m_1$, получим:

$$v_1^2 = v_1^2 - 3\sqrt{2}\,v_1u_2 + 12u_2^2.$$

Отсюда

$$u_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} v_1.$$

Найдем проекции скорости $\vec{u}_1$ на оси X и Y, используя уравнения (6.12.5) и найденное значение u_2:

$$u_{1x} = v_1 - \frac{3}{4} v_1 = \frac{v_1}{4},$$

$$u_{1y} = \frac{3}{4} v_1.$$

Модуль скорости $\vec{u}_1$ равен:

$$u_1 = \sqrt{u_{1x}^2 + u_{1y}^2} = \frac{\sqrt{10}}{4} v_1.$$

Направление вектора скорости $\vec{u}_1$ образует с осью X угол α_1, удовлетворяющий уравнению

$$\cos \alpha_1 = \frac{u_{1x}}{u_1} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0{,}32.$$

Пользуясь тригонометрическими таблицами, находим, что

$$\alpha_1 = 71°.$$

Упражнение 11

1. Почему при абсолютно упругом соударении шарика со стенкой импульс шарика меняется, а кинетическая энергия не меняется?
2. Какая работа будет совершена, если под действием силы, равной 13 Н, груз массой 1 кг поднимется на высоту 5 м?
3. Автомобиль массой 2 т трогается с места и едет в гору, которая поднимается на 2 м на каждые 100 м пути. Пройдя 100 м, он достигает скорости 32,4 км/ч. Коэффициент трения равен 0,05. Определите мощность, развиваемую двигателем.
4. Мощность гидростанции $N = 7{,}35 \cdot 10^7$ Вт. Чему равен объемный расход воды Q_V, если коэффициент полезного действия станции $\eta = 75\%$ и плотина поднимает уровень воды на высоту $H = 10$ м?
5. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v_0 = 49$ м/с. На какой высоте H его кинетическая энергия E_k равна его потенциальной энергии E_p?

6. На нити в вертикальной плоскости вращается груз массой m. Найдите разность сил натяжения нити при прохождении грузом нижней и верхней точек траектории.

7. Жесткий невесомый стержень OB может вращаться без трения в вертикальной плоскости вокруг оси, проходящей через точку O. В середине стержня и на его конце закреплены два шарика, массы которых $m_A = 4m$ и $m_B = m$. Стержень приводят в горизонтальное положение и отпускают (рис. 6.28). Определите натяжение стержня на участках OA и AB в момент прохождения положения равновесия.

8. Из шахты глубиной 200 м поднимают с постоянной скоростью груз массой 500 кг на канате, каждый метр которого имеет массу 1,5 кг. Определите работу, совершаемую при поднятии груза.

9. Санки съезжают с горы высотой H и углом наклона α и движутся далее по горизонтальному участку (рис. 6.29). Коэффициент трения на всем пути санок одинаков и равен μ. Определите расстояние s, которое пройдут санки, двигаясь по горизонтальному участку до полной остановки.

10. Шарик массой $m = 100$ г подвешен на нити длиной $l = 1$ м. Шарик раскручивают так, что он движется по окружности в горизонтальной плоскости, отстоящей от точки подвеса на половину длины нити (конический маятник). Какую работу надо совершить для раскручивания шарика?

11. Закрытый пробкой сосуд, вес которого равен выталкивающей силе, покоится на дне стакана с водой. Почти не совершая работы, его можно поднять к поверхности воды. Если теперь вынуть пробку, то сосуд наполнится водой и утонет. При этом он может совершить работу. Если же вынуть пробку, когда сосуд лежит на дне, он также наполнится водой, но работы не совершит. Как согласовать полученный в первом случае выигрыш в работе с законом сохранения энергии?

12. Свинцовый шар массой $m_1 = 500$ г, движущийся со скоростью $v_1 = 10$ м/с, сталкивается с неподвижным шаром из воска массой $m_2 = 200$ г, после чего шары движутся вместе. Определите кинетическую энергию шаров после удара.

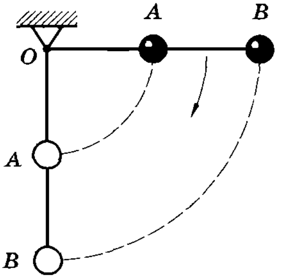


Рис. 6.28

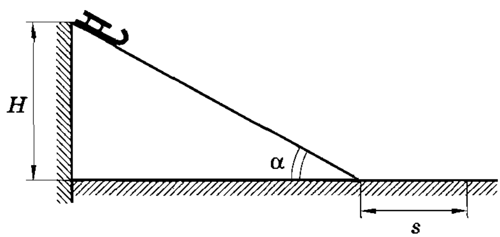


Рис. 6.29

13. С какой скоростью u должна двигаться нога футболиста, чтобы после столкновения с ней мяч остановился? Скорость мяча до столкновения равна v. Массу мяча считать много меньшей массы ноги.

14. Шар массой M, имеющий скорость $\vec{v}$, налетает на покоящийся шар массой m. Происходит центральный абсолютно упругий удар. В момент наибольшей деформации шары имеют одинаковую скорость. Чему равна потенциальная энергия деформации шаров в этот момент времени?

15. На покоящийся шар налетает второй шар, имеющий перед ударом скорость $\vec{v}$. Происходит упругий нецентральный удар. Докажите, что угол между скоростями шаров после удара равен 90°, если шары имеют одинаковые массы.

16. Мяч брошен вертикально вверх. Учитывая сопротивление воздуха, сравните время подъема и время падения мяча.

17. Однородная цепочка длиной l лежит на абсолютно гладкой доске. Небольшая часть цепочки пропущена в отверстие, сделанное в доске (рис. 6.30). В начальный момент времени лежащий на доске конец цепочки придерживают, а затем отпускают, и цепочка начинает соскальзывать с доски под действием силы тяжести свешивающегося конца. Определите скорость движения цепочки в момент, когда длина свешивающейся части равна l.

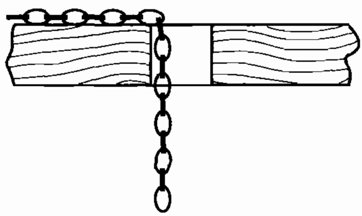


Рис. 6.30

18. С горки высотой h соскальзывает брусок массой m и останавливается на горизонтальной поверхности из-за действия силы трения. Какую работу надо совершить, чтобы поднять брусок на вершину этой горки, не увеличивая его кинетическую энергию? Брусок перемещают так, что он не отрывается от поверхности, и сила, под действием которой поднимается груз, направлена по касательной к поверхности во всех точках.

19. Между двумя шариками массами m и M находится сжатая пружина. Если один шарик (массой M) удерживать на месте, а другой освободить, то он отлетает со скоростью $\vec{v}$. С какой скоростью будет двигаться шарик массой m, если оба шарика освободить одновременно? Деформация пружины одинакова в обоих случаях.

20. От поезда массой $M = 600$ т, идущего с постоянной скоростью по прямолинейному горизонтальному пути, отрывается последний вагон массой $m = 60$ т. Какое расстояние до остановки пройдет этот вагон, если в момент его остановки поезд движется с постоянной скоростью 40 км/ч? Мощность тепловоза, ведущего состав вагонов, постоянна и равна $N = 1$ МВт.

21. Сваю массой 1000 кг забивают в грунт копром, масса которого 4000 кг. Копер свободно падает с высоты 5 м, и при каждом ударе свая опускается на глубину 5 см. Определите силу сопротивления грунта, считая ее постоянной.

22. Колодец, площадь дна которого S и глубина H, наполовину заполнен водой. Насос выкачивает воду и подает ее на поверхность Земли через цилиндрическую трубу радиусом R. Какую работу A совершит насос, если выкачает всю воду из колодца за время τ?

23. Рассматривая падение камня на Землю, мы утверждаем, что изменение импульса Земли равно изменению импульса камня, а изменение кинетической энергии Земли при этом не нужно учитывать. Как это объяснить?

24. Кубик соскальзывает без трения с наклонной плоскости высотой h. Согласно закону сохранения энергии его кинетическая энергия у основания плоскости равна $\frac{mv^2}{2} = mgh$. Рассмотрим теперь движение кубика с точки зрения инерциальной системы отсчета, движущейся вдоль горизонтальной плоскости со скоростью $v = \sqrt{2gh}$. В этой системе отсчета начальная скорость кубика равна $v = \sqrt{2gh}$, а конечная скорость равна нулю. Следовательно, начальная энергия $E_1 = \frac{mv^2}{2} + mgh = 2mgh$, а конечная $E_2 = 0$. Куда же исчезла энергия?

25. С высоты $2R$ соскальзывает небольшое тело по желобу, который образует «мертвую петлю» радиусом R (рис. 6.31). На какой высоте h относительно уровня AB тело оторвется от желоба? На какой высоте H оно пройдет над точкой A?

26. Лента транспортера длиной l движется со скоростью v_0 (рис. 6.32). С какой скоростью v нужно толкнуть кубик массой m против движения ленты, чтобы уменьшение механической энергии за счет работы силы трения между кубиком и лентой транспортера было максимальным? Чему равно это уменьшение механической энергии ΔE, если коэффициент трения равен μ и выполняется условие $v_0^2 < 2\mu lg$?

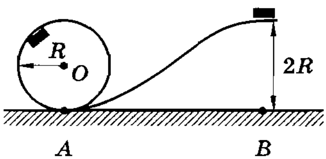


Рис. 6.31

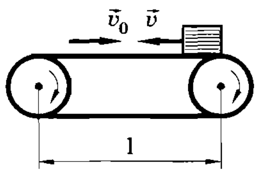


Рис. 6.32

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДЫХ И ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Глава 7

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Предыдущие главы были посвящены описанию движения материальной точки. Именно для точки вводятся понятия координат, скорости, траектории, ускорения. Описать движение точки проще всего. Но точек в природе нет, и далеко не во всех случаях тело можно рассматривать как точку. Надо уметь описывать движение реальных тел.

§ 7.1. АБСОЛЮТНО ТВЕРДОЕ ТЕЛО И ВИДЫ ЕГО ДВИЖЕНИЯ

Проще всего описать движение тела, взаимное расположение частей которого не изменяется. Такое тело называется абсолютно твердым.

При изучении кинематики мы говорили, что описать движение тела — это значит описать движение всех его точек. Иными словами, надо уметь находить координаты, скорость, ускорение, траектории всех точек тела. В общем случае это сложная задача, и мы не будем пытаться ее решать. Особенно она сложна, когда тела заметно деформируются в процессе движения.

Тело можно считать абсолютно твердым, если расстояния между двумя любыми точками тела неизменны. Иначе говоря, форма и размеры абсолютно твердого тела не изменяются при действии на него любых сил[1].

На самом деле таких тел нет. Это физическая модель. В тех случаях, когда деформации малы, можно реальные тела рассматривать как абсолютно твердые. Однако и движение твердого тела в общем случае сложно. Мы остановимся на двух, наиболее простых видах движения твердого тела: поступательном и вращательном.

Поступательное движение

Твердое тело движется поступательно, если любой отрезок прямой линии, жестко связанный с телом, все время перемещается параллельно самому себе.

При поступательном движении все точки тела совершают одинаковые перемещения, описывают одинаковые траектории, проходят одинаковые пути, имеют равные скорости и ускорения. Покажем это.

Пусть тело движется поступательно. Соединим две произвольные точки A и B тела отрезком прямой линии (рис. 7.1). Отрезок AB должен оставаться параллельным самому себе. Расстояние AB не изменяется, так как тело абсолютно твердое.

В процессе поступательного движения вектор $\overrightarrow{AB}$ не изменяется, т. е. остаются постоянными его модуль и направление. Вследствие этого траектории точек A и B идентичны, так как они могут быть полностью совмещены параллельным переносом на $\overrightarrow{AB}$.

Нетрудно заметить, что перемещения точек A и B одинаковы и совершаются за одно и то же время. Следовательно, точки A и B имеют одинаковые скорости. Одинаковы у них и ускорения.

Совершенно очевидно, что для описания поступательного движения тела достаточно описать движение какой-либо одной его точки, так как все точки движутся одинаково. Лишь в этом движении можно говорить о скорости тела и ускорении тела. При любом другом движении тела его точки имеют различные скорости и ускорения, и термины «скорость тела» или «ускорение тела» теряют смысл.

Приблизительно поступательно движется ящик письменного стола, поршни двигателя автомобиля относительно цилинд-

---

[1] В дальнейшем для краткости мы будем говорить просто о твердом теле.

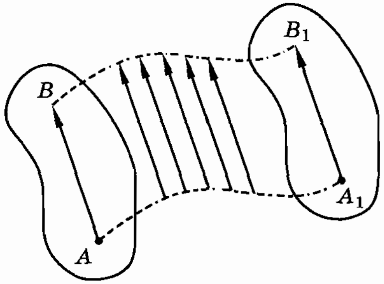


Рис. 7.1

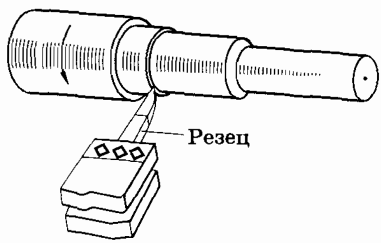


Рис. 7.2

ров, вагоны на прямолинейном участке железной дороги, резец токарного станка относительно станины (рис. 7.2) и т. д. Поступательными можно считать и движения, имеющие довольно сложный вид, например движение педали велосипеда или кабины «колеса обозрения» (рис. 7.3) в парках.

Вращательное движение

Вращательное движение вокруг неподвижной оси — еще один вид движения твердого тела.

Вращением твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором все точки тела описывают окружности, центры которых находятся на одной прямой, перпендикулярной плоскостям этих окружностей. Сама эта прямая есть ось вращения (*MN* на рисунке 7.4).

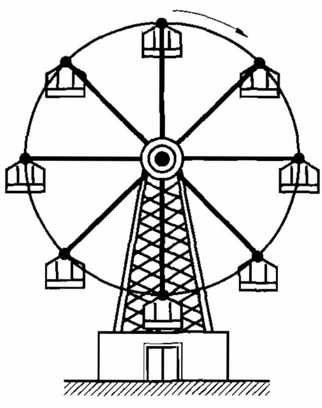


Рис. 7.3

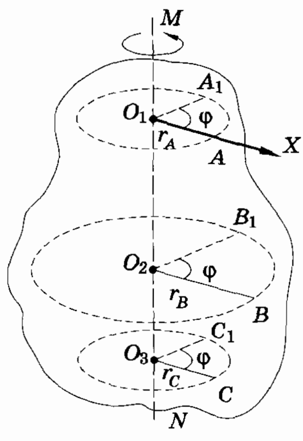


Рис. 7.4

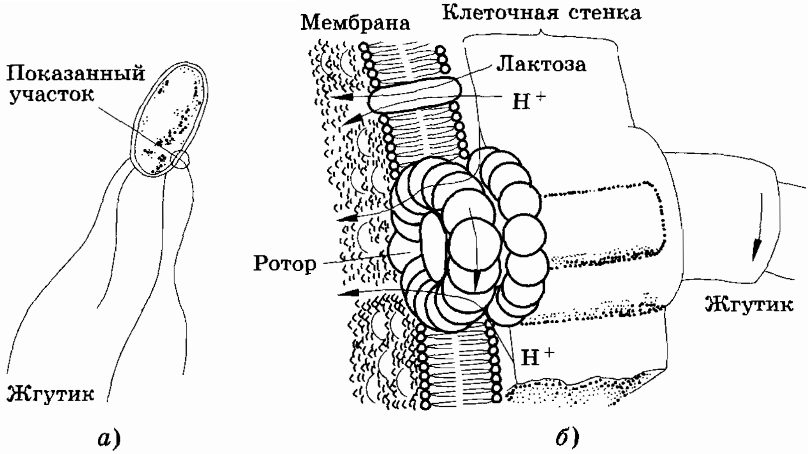


Рис. 7.5

В технике такой вид движения встречается чрезвычайно часто: вращение валов двигателей и генераторов, колес современных скоростных электропоездов и деревенской телеги, турбин и пропеллеров самолетов и т. д. Вращается Земля вокруг своей оси.

Долгое время считалось, что в живых организмах устройств, подобных вращающемуся колесу, нет: «природа не создала колеса». Но исследования последних лет показали, что это не так. У многих бактерий, например у кишечной палочки, имеется «мотор», вращающий жгутики. С помощью этих жгутиков бактерия перемещается в среде (рис. 7.5, *а*). Основание жгутика прикреплено к колесику (ротору) в форме кольца (рис. 7.5, *б*). Плоскость ротора параллельна другому кольцу, закрепленному в мембране клетки. Ротор вращается, делая до восьми оборотов в секунду. Механизм, приводящий ротор во вращение, остается пока во многом не ясным.

Кинематическое описание вращательного движения твердого тела

При вращении тела радиус r_A окружности, описываемой точкой A этого тела (см. рис. 7.4), повернется за интервал времени Δt на некоторый угол φ. Легко видеть, что вследствие неизменности взаимного расположения точек тела на такой же угол φ повернутся за то же время и радиусы окружностей, описываемых любыми другими точками тела (см. рис. 7.4). Следовательно, этот угол φ можно считать величиной, характеризующей движение не только отдельной точки тела, но и вращательное движение всего тела в целом. Стало быть, для описания вращения твердого тела вокруг неподвижной оси достаточно лишь одной величины — переменной $\varphi(t)$.

Этой единственной величиной (координатой) и может служить угол φ, на который поворачивается тело вокруг оси относительно некоторого своего положения, принятого за нулевое. Это положение задается осью O_1X на рисунке 7.4 (отрезки O_2B, O_3C параллельны O_1X).

В § 1.28 было рассмотрено движение точки по окружности. Были введены понятия угловой скорости ω и углового ускорения β. Так как при вращении твердого тела все его точки за одинаковые интервалы времени поворачиваются на одинаковые углы, то все формулы, описывающие движение точки по окружности, оказываются применимыми и для описания вращения твердого тела. Определения угловой скорости (1.28.2) и углового ускорения (1.28.6) могут быть отнесены к вращению твердого тела. Точно так же справедливы формулы (1.28.7) и (1.28.8) для описания движения твердого тела с постоянным угловым ускорением.

Связь между линейной и угловой скоростями (см. § 1.28) для каждой точки твердого тела дается формулой

$$v = \omega R, \tag{7.1.1}$$

где R — расстояние точки от оси вращения, т. е. радиус окружности, описываемой точкой вращающегося тела. Направлена линейная скорость по касательной к этой окружности. Различные точки твердого тела имеют разные линейные скорости при одной и той же угловой скорости.

Различные точки твердого тела имеют нормальные и тангенциальные ускорения, определяемые формулами (1.28.10) и (1.28.11):

$$a_n = \omega^2 R,\ a_\tau = \beta R. \tag{7.1.2}$$

Плоскопараллельное движение

Плоскопараллельным (или просто плоским) движением твердого тела называется такое движение, при котором каждая точка тела движется все время в одной плоскости. Причем все плоскости, в которых движутся точки, параллельны между собой. Типичный пример плоскопараллельного движения — качение цилиндра по плоскости. Плоскопараллельным является также движение колеса по прямому рельсу.

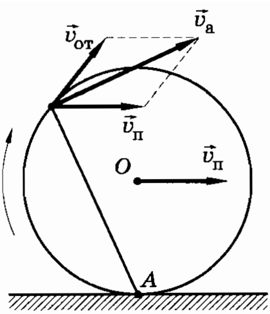


Рис. 7.6

Напомним (в который раз!), что говорить о характере движения того или иного тела можно лишь по отношению к определенной системе отсчета. Так, в приведенных примерах в системе отсчета, связанной с рельсом (землей), движение цилиндра или колеса является плоскопараллельным, а в системе отсчета, связанной с осью колеса (или цилиндра), — вращательным. Следовательно, скорость каждой точки колеса в системе отсчета, связанной с землей (абсолютная скорость), согласно закону сложения скоростей равна векторной сумме линейной скорости вращательного движения (относительной скорости) и скорости поступательного движения оси (переносной скорости) (рис. 7.6):

$$\vec{v}_{\text{а}} = \vec{v}_{\text{от}} + \vec{v}_{\text{п}}.$$

Мгновенный центр вращения

Пусть тонкий диск катится по плоскости (рис. 7.7). Окружность можно рассматривать как правильный многоугольник со сколь угодно большим числом сторон. Поэтому круг, изображенный на рисунке 7.7, можно мысленно заменить многоугольником (рис. 7.8). Но движение последнего состоит из ряда небольших поворотов: сначала вокруг точки C, затем вокруг точек C_1, C_2 и т. д. Поэтому движение диска тоже можно рассматривать как последовательность очень малых (бесконечно малых) поворотов вокруг точек C, C_1, C_2 и т. д.[1]. Таким образом, в каждый момент времени диск вращается вокруг своей нижней точки C. Эта точка называется **мгновенным центром вращения диска**. В случае качения диска по плоскости можно говорить о *мгновенной оси вращения.* Этой осью является линия соприкосновения диска с плоскостью в данный момент времени.

Введение понятия мгновенного центра (мгновенной оси) вращения упрощает решение ряда задач. Например, зная, что центр диска имеет скорость $\vec{v}$, можно найти скорость точки A

[1] Разумеется, изобразить на рисунке многоугольник с бесконечным числом сторон невозможно.

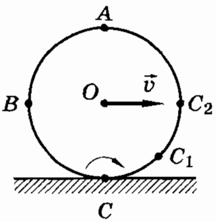


Рис. 7.7

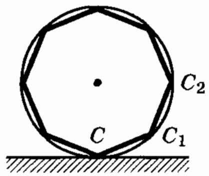


Рис. 7.8

(см. рис. 7.7). Действительно, так как диск вращается вокруг мгновенного центра C, то радиус вращения точки A равен AC, а радиус вращения точки O равен OC. Но так как $AC = 2OC$, то

$$v_A = 2v_0 = 2v.$$

Аналогично можно найти скорость любой точки этого диска.

Мы познакомились с наиболее простыми видами движения твердого тела: поступательным, вращательным, плоскопараллельным. В дальнейшем нам предстоит заняться динамикой твердого тела.

§ 7.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Шкив *1* радиусом $O_1B = r_1 = 0{,}5$ м вращается равномерно с частотой $n_1 = 0{,}5\ \text{с}^{-1}$. Он соединен ременной передачей со шкивом *2* радиусом $O_2C = r_2 = 1$ м (рис. 7.9). Определите модули скорости и ускорения точки A шкива *3* радиусом $O_2A = R = 1{,}2$ м, жестко соединенного со шкивом *2*. Ремень не проскальзывает.

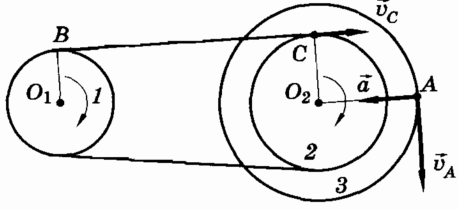


Рис. 7.9

Решение. Так как все точки ремня имеют одинаковые по модулю скорости, то $v_B = v_C$ или $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$, где ω_1 и ω_2 — угловые скорости шкивов *1* и *2*. Отсюда

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2}.$$

Частота вращения равна n_1. Следовательно (см. § 1.28),

$$\omega_1 = 2\pi n_1.$$

Определим угловую скорость шкива *2*:

$$\omega_2 = 2\pi n_1 \frac{r_1}{r_2}.$$

Так как шкив *3*, которому принадлежит точка *A*, жестко соединен со шкивом *2*, то угловые скорости шкивов одинаковы и, следовательно, скорость точки *A* равна:

$$v_A = \omega_2 R = \frac{2\pi n_1 r_1}{r_2} R;$$

$$v_A = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}{1} \cdot 1{,}2 \text{ м/с} \approx 2 \text{ м/с}.$$

Так как $\omega_2 = \text{const}$, то модуль нормального ускорения точки *A* равен:

$$a_n = \omega_2^2 R = 3 \text{ м/с}^2.$$

Задача 2

Две параллельные рейки движутся в противоположные стороны со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Между рейками зажат диск радиусом *R*, катящийся по рейкам без проскальзывания (рис. 7.10, *а*). Найдите угловую скорость диска и скорость его центра.

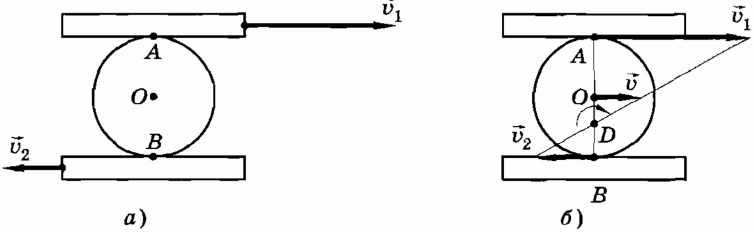


Рис. 7.10

Решение. Так как диск катится по рейкам без проскальзывания, то скорости точек A и B равны скоростям движения реек. Найдем точку, относительно которой диск можно считать вращающимся в каждое мгновение (мгновенный центр вращения). Для этого соединим концы векторов скоростей точек A и B (рис. 7.10, *б*). Точка пересечения этого отрезка с диаметром AB является центром вращения диска в данный момент времени.

Определим расстояние от мгновенного центра вращения (точка D) до центра симметрии O диска. Полагая $OD = x$, имеем:

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{AD}{BD} = \frac{R + x}{R - x}.$$

Отсюда

$$x = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{\upsilon_1 + \upsilon_2} R.$$

Воспользовавшись формулой (7.1.1), вычислим угловую скорость диска:

$$\omega = \frac{\upsilon_1}{AD} = \frac{\upsilon_1}{R + x}.$$

Учитывая, что $R + x = \dfrac{2R\upsilon_1}{\upsilon_1 + \upsilon_2}$, получим:

$$\omega = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2R}.$$

Модуль скорости центра диска определим по формуле

$$\upsilon = \omega \cdot OD = \frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{2}.$$

Упражнение 12

1. Линейная скорость точек окружности вращающегося диска равна $\upsilon_1 = 3$ м/с, а точек, находящихся ближе к оси вращения на расстояние $l = 10$ см, $\upsilon_2 = 2$ м/с. Сколько оборотов в минуту делает диск?
2. Найдите модули линейной скорости и нормального ускорения точек поверхности земного шара: а) на экваторе; б) на широте 60°. Средний радиус земного шара считать равным 6400 км.

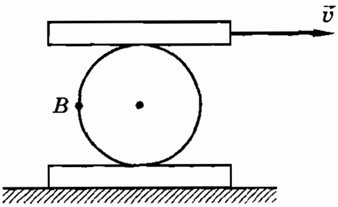


Рис. 7.11

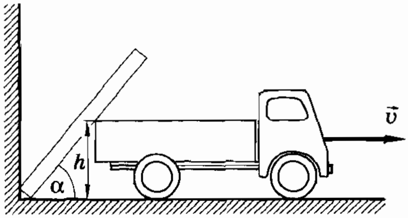


Рис. 7.12

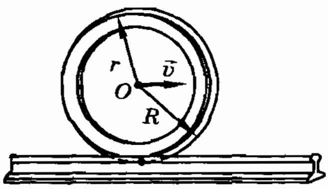


Рис. 7.13

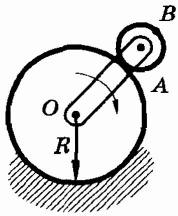


Рис. 7.14

3. Диск радиусом R зажат между двумя параллельными рейками (рис. 7.11). Нижняя рейка неподвижна, а верхняя движется со скоростью $v = 4$ м/с. Определите скорость точки B диска относительно неподвижного наблюдателя, если проскальзывание отсутствует.
4. Бревно нижним концом упирается в угол между стеной и землей и касается борта грузовика на высоте h от земли (рис. 7.12). Найдите угловую скорость бревна в зависимости от угла α, если грузовик отъезжает со скоростью $\vec{v}$. При движении грузовик не увлекает бревно за собой.
5. Трамвай движется со скоростью $\vec{v}$. Радиус трамвайного колеса равен r, а радиус реборды — R (рис. 7.13). С какой скоростью и в каком направлении движется в данный момент времени нижняя точка реборды (точка B)?
6. Кривошип OA, вращаясь с угловой скоростью $\omega = 2{,}5$ рад/с, приводит в движение колесо радиусом $AB = r = 5$ см, катящееся по неподвижному колесу радиусом $R = 15$ см (рис. 7.14). Найдите скорость точки B.

§ 7.3. ЦЕНТР МАСС ТВЕРДОГО ТЕЛА. ИМПУЛЬС ТВЕРДОГО ТЕЛА

Вывод законов движения твердого тела на основе законов динамики материальной точки — сложная задача. Мы не будем останавливаться на ее общем решении. Вначале познакомимся с динамикой наиболее простого, поступательного, движения твердого тела. Для этого нужно ввести очень важное для динамики твердого тела понятие — центр масс.

Центр масс

Бросим палку так, чтобы в полете она вращалась в вертикальной плоскости. Если палка однородная, то можно заметить, что точка, находящаяся в центре палки, движется по плавной линии — такой, по которой летел бы брошенный камень, сама же палка вращается вокруг этой точки (рис. 7.15). Прикрепим к одному из концов палки груз и снова ее бросим таким же образом. Движение будет похожим, однако точка, движущаяся по плавной кривой, оказывается не в центре палки, а ближе к грузу (рис. 7.16).

Из этого примера можно сделать вывод, *что существует такая точка тела, которая движется так, как будто на нее действуют только внешние силы, причем ее положение зависит от того, как распределена масса внутри тела.* Такую точку назовем **центром масс тела**.

Пусть система состоит из двух материальных точек массами m_1 и m_2. Разумно предположить, что центр масс расположен на отрезке прямой, соединяющей эти точки, и находится ближе к точке с большей массой. Наиболее простым будет предположе-

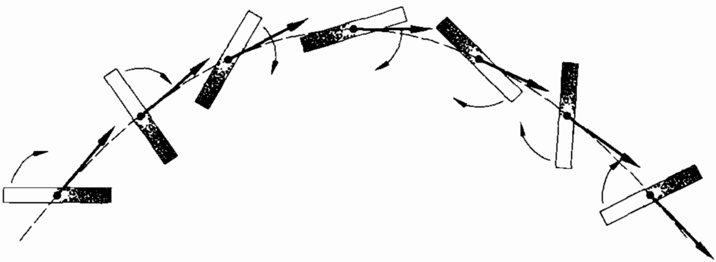


Рис. 7.15

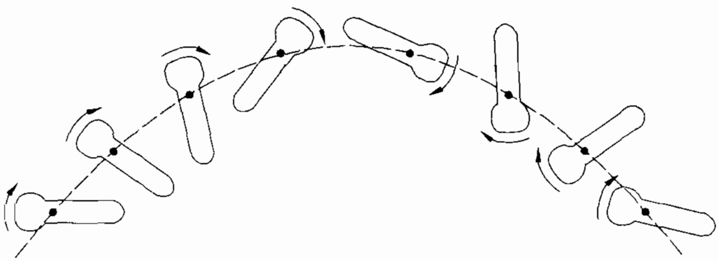


Рис. 7.16

ние, что расстояния l_1 и l_2 от соответствующих точек до центра масс обратно пропорциональны массам этих точек[1], т. е.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{l_2}{l_1} \text{ или } m_1 l_1 = m_2 l_2. \qquad (7.3.1)$$

Пусть $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$ — векторы, проведенные от точек к центру масс; $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ — радиусы-векторы точек, а $\vec{r}_c$ — радиус-вектор, проведенный из начала координат к центру масс этих двух точек. Тогда, как видно из рисунка 7.17,

$$\vec{r}_1 + \vec{l}_1 = \vec{r}_c,$$
$$\vec{r}_2 + \vec{l}_2 = \vec{r}_c.$$

Умножив обе части первого уравнения на m_1, а второго на m_2, сложим их. В результате получится:

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_1\vec{l}_1 + m_2\vec{l}_2 = (m_1 + m_2)\vec{r}_c.$$

Но из рисунка 7.17 и формулы (7.3.1) следует, что $m_1\vec{l}_1 = -m_2\vec{l}_2$. Таким образом, для системы, состоящей из двух точек, положение центра масс определяется радиусом-вектором

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \qquad (7.3.2)$$

Обобщим это соотношение на случай системы из произвольного числа материальных точек. В частности, этой системой может быть твердое тело. Если массу отдельного i-го элемента (материальной точки) обозначить через Δm_i, а радиус-вектор через $\vec{r}_i$, то положение центра масс будет определяться по формуле:

$$\boxed{\vec{r}_c = \frac{\sum\limits_i \Delta m_i \vec{r}_i}{m},} \qquad (7.3.3)$$

где $m = \sum\limits_i \Delta m_i$ — суммарная масса системы.

Как и любое векторное соотношение, формула (7.3.3) представляет собой компактную запись трех независимых выражений, определяющих координаты центра масс:

---

[1] Вспомните, что подобное соотношение выполняется при равновесии рычага.

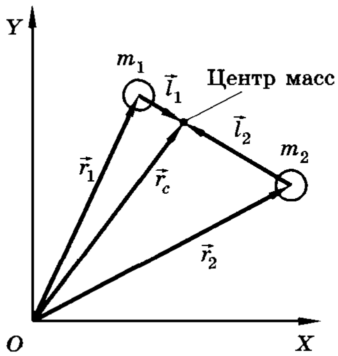


Рис. 7.17

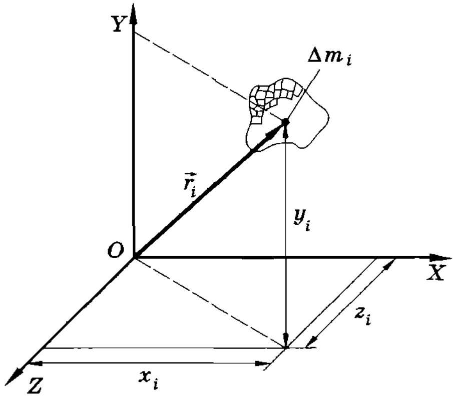


Рис. 7.18

$$x_c = \frac{\sum\limits_i \Delta m_i x_i}{m}, \quad y_c = \frac{\sum\limits_i \Delta m_i y_i}{m}, \quad z_c = \frac{\sum\limits_i \Delta m_i z_i}{m}. \qquad (7.3.4)$$

Здесь x_i, y_i, z_i — координаты одного из элементов тела (рис. 7.18). Далее мы докажем, что точка с координатами, определяемыми выражениями (7.3.4), действительно движется так, как движется материальная точка под действием внешних сил, приложенных к телу.

Мы не будем сейчас обсуждать методы нахождения центра масс различных тел. Ограничимся лишь достаточно очевидным указанием на то, что центр масс всех однородных тел, имеющих центр симметрии, совпадает с этим центром. Так, центр масс однородного шара совпадает с его центром. Центр масс параллелепипеда находится в его центре симметрии. А центр масс однородного стержня находится в его середине.

Центр масс твердого тела может находиться и вне самого тела, например у однородной сферы или у кольца. Но все равно ускорение этой точки, не находящейся в твердом теле и соответственно не являющейся материальной точкой, тоже будет определяться внешними силами, приложенными к телу.

Импульс твердого тела

Докажем, что **импульс твердого тела равен импульсу материальной точки, масса которой равна массе тела, а скорость равна скорости центра масс.**

Импульс твердого тела по определению равен суммарному импульсу всех его точек:

$$\vec{p} = \sum_i \Delta m_i \vec{v}_i, \qquad (7.3.5)$$

где $\vec{v}_i$ — скорости отдельных точек тела.

С другой стороны, согласно (7.3.3)

$$m\vec{r}_c = \sum_i \Delta m_i \vec{r}_i. \qquad (7.3.6)$$

Пусть за малое время Δt радиусы-векторы элементов тела изменяются на $\Delta\vec{r}_i$. Тогда и радиус-вектор центра масс изменится на $\Delta\vec{r}_c$:

$$m\Delta\vec{r}_c = \sum_i \Delta m_i \Delta\vec{r}_i. \qquad (7.3.7)$$

Разделим левую и правую части этого выражения на Δt:

$$m\frac{\Delta\vec{r}_c}{\Delta t} = \sum_i \Delta m_i \frac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta t}. \qquad (7.3.8)$$

Но $\dfrac{\Delta\vec{r}_i}{\Delta t} = \vec{v}_i$ — скорость i-го элемента твердого тела, а $\dfrac{\Delta\vec{r}_c}{\Delta t} = \vec{v}_c$ — скорость центра масс.

Следовательно,

$$m\vec{v}_c = \sum_i \Delta m_i \Delta\vec{v}_i. \qquad (7.3.9)$$

Сравнивая это выражение с определением импульса тела (7.3.5), придем к выводу:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}_c.} \qquad (7.3.10)$$

Это и требовалось доказать.

Заметим, что формула (7.3.10), так же как и определение центра масс (7.3.3), относится не только к твердому телу, но и к любой совокупности материальных точек. Мы ведь не требовали, чтобы расстояния между отдельными точками оставались неизменными, как это имеет место для твердого тела.

Мы ввели важное понятие: центр масс. Из дальнейшего будет видно, что определенный таким образом центр масс и является той замечательной точкой системы, для определения движения которой достаточно знания лишь внешних сил.

§ 7.4. ТЕОРЕМА О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС

Теорема о движении центра масс формулируется следующим образом: центр масс твердого тела движется так же, как двигалась бы материальная точка, масса которой равна массе тела, под действием внешних сил, приложенных к данному телу.

Уравнение движения i-го элемента тела массой Δm_i запишется так:

$$\frac{\Delta \vec{p}_i}{\Delta t} = \frac{\Delta(\Delta m_i \vec{v}_i)}{\Delta t} = \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i. \qquad (7.4.1)$$

Здесь $\vec{F}_i$ — внешняя сила, а $\sum\limits_{k \neq i} \vec{F}_{ik}$ — сумма внутренних сил, действующих на i-й элемент тела со стороны всех других элементов.

Запишем аналогичные уравнения для всех элементов и сложим их почленно. По третьему закону Ньютона $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$. Поэтому сумма всех внутренних сил равна нулю, так как в этой сумме будут встречаться только пары сил $\vec{F}_{ik} + \vec{F}_{ki} = 0$ при различных значениях i и k.

Следовательно, после сложения уравнений получим:

$$\sum_i \frac{\Delta(\Delta m_i \vec{v}_i)}{\Delta t} = \sum_i \vec{F}_i.$$

Поменяв знак суммирования $\sum\limits_i$ и приращения Δ местами, будем иметь:

$$\frac{\Delta \sum\limits_i \Delta m_i \vec{v}_i}{\Delta t} = \sum_i \vec{F}_i.$$

Но $\sum\limits_i \Delta m_i \vec{v}_i = m\vec{v}_c$ (см. § 7.3), поэтому

$$\boxed{m\vec{a}_c = m\frac{\Delta \vec{v}_c}{\Delta t} = \sum_i \vec{F}_i.} \qquad (7.4.2)$$

Теорема доказана. Зная внешние силы $\vec{F}_i$ и массу тела, мы можем определить, как движется центр масс. Но, конечно, не можем сказать, как движутся остальные точки тела.

Поступательное движение твердого тела

При поступательном движении все точки твердого тела движутся одинаково. Следовательно, зная движение центра масс, мы тем самым знаем, как движется все тело. Таким образом мы доказали возможность замены твердого тела материальной точкой при рассмотрении его поступательного движения.

Следствие теоремы о движении центра масс

Из теоремы о движении центра масс вытекает одно очень важное следствие.

Если сумма внешних сил равна нулю, то центр масс покоится или движется равномерно и прямолинейно.

Действительно, если $\sum_i \vec{F}_i = 0$, то согласно (7.4.2)

$$\frac{\Delta\vec{v}_c}{\Delta t} = 0 \text{ и } \vec{v}_c = \text{const}.$$

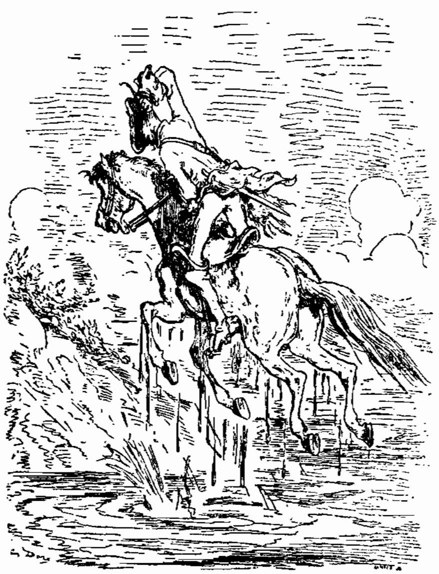


Рис. 7.19

Если в начальный момент $v_c = 0$, то и в дальнейшем центр масс будет оставаться в покое.

Так, например, Мюнхгаузен, герой известной книги «Приключения барона Мюнхгаузена», в действительности не мог бы вытянуть себя из болота за косу (рис. 7.19). Сила, действующая со стороны руки, является внутренней и не в состоянии поднять центр масс барона.

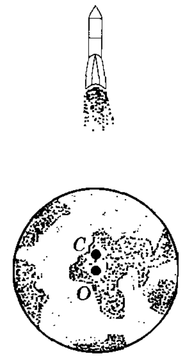


Рис. 7.20

По тем же причинам неосуществим полет на Луну по проекту французского поэта Сирано де Бержерака. Бержерак предлагал периодически подбрасывать с железной тележки большой магнит. Магнит должен был якобы с каждым разом подтягивать тележку немного вверх.

Иное дело ракета. При старте ракеты в космическом пространстве центр масс системы ракета — выхлопные газы будет оставаться на месте. Ракета летит в одну сторону, а отработанные газы в противоположную.

Несколько сложнее обстоит дело при старте ракеты с поверхности Земли. В этом случае остается неизменной в инерциальной (гелиоцентрической) системе отсчета скорость центра масс ракеты, Земли и газов (рис. 7.20). Ведь при старте огненная струя из сопла ракеты ударяет в Землю и слегка смещает ее на орбите. Именно из-за этого малого смещения Земли скорость центра масс системы ракета — Земля не меняется при выходе ракеты в космос.

Из теоремы о движении центра масс следует, что внутренние силы не в состоянии изменить скорость центра масс. Это могут сделать только внешние силы, если их векторная сумма не равна нулю.

§ 7.5. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задачи на движение центра масс не отличаются принципиально от задач на динамику материальной точки. Только в данном случае такой точкой является центр масс.

Действительно, в каких бы точках тела ни были приложены внешние силы, они однозначно определяют ускорение центра масс тела. В случае системы тел внешние силы определяют ускорение центра масс системы.

Тем не менее понятие центра масс глубже и информативнее, чем понятие материальной точки. Оно относится к реальным телам и системам тел. Тело может вращаться вокруг центра масс, а отдельные тела системы могут совершать относительно центра масс перемещения, не влияющие на его движение.

Нужно помнить, что импульс системы равен ее массе, умноженной на скорость центра масс.

При решении ряда задач следует использовать формулы для определения координат центра масс, законы сохранения и кинематические соотношения.

Задача 1

На тележке, стоящей на гладкой горизонтальной поверхности, укреплен однородный цилиндр, который может вращаться вокруг горизонтальной оси (рис. 7.21). На цилиндр намотана нить, к концу которой приложена горизонтальная сила $\vec{F}$. Найдите ускорение тележки, если ее масса m_1, а масса цилиндра m_2.

Решение. Тележка с цилиндром — сложная система. Но в задаче требуется определить лишь ускорение тележки. Так как цилиндр однородный, то его вращение не меняет положение центра масс системы относительно тележки. Поэтому ускорение тележки совпадает с ускорением центра масс системы.

Действующие по вертикали силы тяжести и силы реакции опоры взаимно уравновешиваются. Вдоль горизонтали действует только сила $\vec{F}$. Она-то и сообщает ускорение центру масс.

В проекциях на горизонтальную ось X теорема о движении центра масс запишется так:

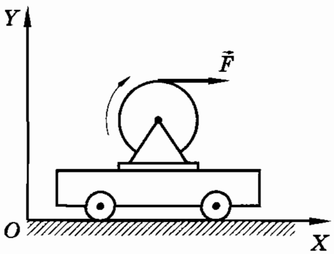


Рис. 7.21

$$(m_1 + m_2)a_x = F_x.$$

Так как при данном выборе оси X $F_x = F$, то

$$a_x = \frac{F}{m_1 + m_2}.$$

Очевидно, что $a_x > 0$ и тележка имеет ускорение, совпадающее с положительным направлением оси X.

Задача 2

На гладком горизонтальном столе лежит гантелька, состоящая из двух маленьких шариков, соединенных невесомым стержнем длиной l. Массы шариков равны $m_1 = 3m_0$ и $m_2 = 2m_0$. На один из шариков налетает кусочек пластилина массой $m_3 = m_0$ и прилипает к нему. Скорость пластилина $\vec{v}_0$ перпендикулярна стержню, соединяющему шарики (рис. 7.22, *а*). Определите, какая точка стержня после соударения будет двигаться с постоянной скоростью, и найдите эту скорость.

Решение. После столкновения с кусочком пластилина гантелька начнет вращаться вокруг центра масс образовавшейся системы, а центр масс будет двигаться прямолинейно и равномерно в соответствии с законом сохранения импульса.

Импульс системы до и после соударения остается неизменным, так как силами трения можно пренебречь. Действующие по нормали к столу внешние силы взаимно уравновешиваются.

Согласно закону сохранения импульса

$$m_3\vec{v}_0 = (m_1 + m_2 + m_3)\vec{v}_c.$$

Отсюда видно, что скорость $\vec{v}_c$ центра масс (точка C на рисунке 7.22, *б*) направлена в ту же сторону, что и скорость пластилина $\vec{v}_0$ до соударения.

Если ось X направить так, как показано на рисунке 7.22, то закон сохранения импульса в проекциях на эту ось запишется так:

$$m_3v_c = (m_1 + m_2 + m_3)v_c.$$

Следовательно,

$$v_c = \frac{1}{6}v_0.$$

Положение центра масс определяется по формуле (7.3.4):

$$y_c = \frac{(m_1 + m_3)(l + y_0) + m_2y_0}{m_1 + m_2 + m_3} = y_0 + \frac{2}{3}l,$$

где y_0 — координата второго шарика до начала движения гантельки (см. рис. 7.22, *а*). Центр масс находится на расстоянии $2/3l$ от второго шарика.

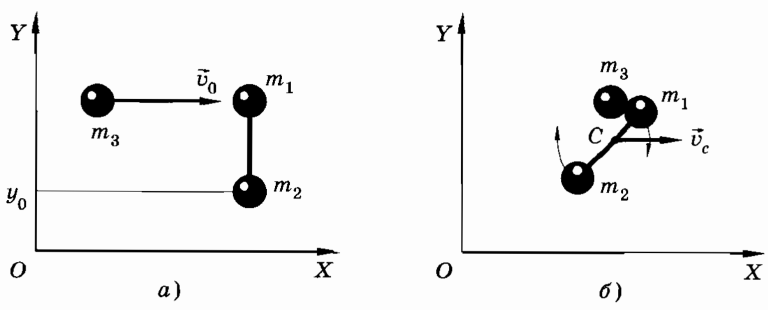


Рис. 7.22

Задача 3

Два одинаковых шарика массой m лежат неподвижно на гладком горизонтальном столе и соединены невесомой пружиной с жесткостью k и длиной l. Третий шарик такой же массы движется со скоростью $\vec{v}_0$ по линии, соединяющей центры первых двух шариков (рис. 7.23), и упруго сталкивается с одним из них. Определите максимальное и минимальное расстояния между шариками, связанными пружиной, при их дальнейшем движении.

Решение. Так как массы шариков одинаковы, то первоначально двигавшийся шарик после центрального упругого удара останавливается (см. § 6.8), а шарик, с которым он столкнулся, приобретает скорость $\vec{v}_0$.

Дальнейшее движение системы происходит так: центр масс движется прямолинейно и равномерно, а шарики совершают колебания относительно центра масс.

Скорость центра масс определим по закону сохранения импульса:

$$m\vec{v}_0 = 2m\vec{v}_c.$$

Отсюда видно, что скорость центра масс направлена в ту же сторону, что и скорость $\vec{v}_0$.

В проекциях на ось X закон сохранения импульса запишется так:

$$mv_0 = 2mv_c, \ v_c = \frac{1}{2}v_0.$$

Теперь воспользуемся законом сохранения энергии.

Шарики движутся (колеблются) относительно центра масс. В моменты максимального и минимального растяжения пружины их скорости относительно центра масс равны нулю и кинетическая энергия системы равна

$$E_k = \frac{2mv_c^2}{2} = \frac{mv_0^2}{4}.$$

Полная энергия системы равна кинетической энергии третьего шарика до соударения:

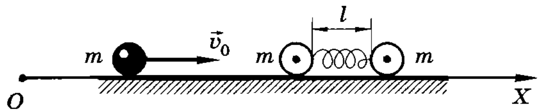


Рис. 7.23

$$E = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Следовательно, энергия деформированной пружины (потенциальная энергия) как при максимальном расстоянии между шариками, так и при минимальном, согласно закону сохранения энергии, равна:

$$E_p = E - E_k = \frac{mv_0^2}{4} = \frac{k|\Delta l|^2}{2},$$

где $|\Delta l|$ — модуль деформации пружины.

Пружина при этом сжата (или растянута) на величину

$$|\Delta l| = v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

Таким образом,

$$l_{\max} = l + |\Delta l| = l + v_0\sqrt{\frac{m}{2k}},$$

$$l_{\min} = l - |\Delta l| = l - v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

Упражнение 13

1. Сообщающиеся сосуды одинакового размера укреплены неподвижно на тележке, которая может перемещаться по горизонтальной поверхности без трения (рис. 7.24). При закрытом кране в левый сосуд налита вода. Какое движение начнет совершать тележка в первый момент после открытия крана? Где окажется тележка, когда ее движение прекратится? Массой сосудов и тележки по сравнению с массой воды можно пренебречь.

2. Два одинаковых груза соединены пружиной. В начальный момент пружина сжата так, что первый груз вплотную прижат к стене (рис. 7.25), а второй груз удерживается упором. Опишите качественно движение системы грузов, которое они будут совершать, если убрать упор. Трение не учитывать.

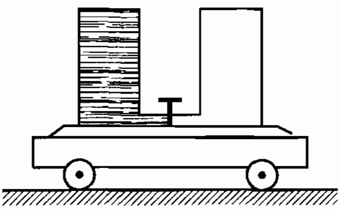


Рис. 7.24

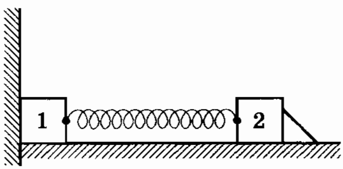


Рис. 7.25

3. На закрепленный в вертикальном положении болт навинчена однородная пластинка (рис. 7.26). Пластинку раскрутили так, что она свинчивается с болта. Трение считать пренебрежимо малым. Как будет двигаться пластинка, когда она, покинув болт, начнет свободно падать?

4. На прямоугольный клин ABC массой M, лежащий на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости, положен подобный же, но меньший по размерам клин BED массой m (рис. 7.27). Определите, на какое расстояние x сместится влево большой клин, когда малый клин соскользнет вниз и точка D совместится с точкой C. Длины катетов AC и BE равны соответственно a и b.

5. На абсолютно гладкой горизонтальной плоскости лежит обруч. На обруче находится жук. Какие траектории будут описывать жук и центр обруча, если жук начнет двигаться вдоль обруча? Масса обруча M и радиус R, масса жука m.

6. Для создания искусственной силы тяжести на пассивном участке полета две части космического корабля (отношение масс 1 : 2) развели на расстояние L между центрами масс частей и раскрутили вокруг общего центра масс. Определите период вращения, если искусственная сила тяжести, действующая на все тела в более массивной части корабля, в два раза меньше силы тяжести на Земле.

7. Космонавт массой m приближается к космическому кораблю массой M с помощью троса, длина которого L. На какие расстояния l_m и l_M переместятся космонавт и корабль до сближения?

8. На нити, перекинутой через блок с неподвижной осью, подвешены два груза массами m_1 и m_2 ($m_2 > m_1$). Найдите ускорение центра масс этой системы.

9. На концах и в середине невесомого стержня длиной l укреплены одинаковые шарики. Стержень ставят вертикально и отпускают. Считая, что трение между полом и нижним шариком отсутствует, найдите скорость верхнего шарика в момент удара о горизонтальную плоскость.

10. На гладком горизонтальном столе лежат два одинаковых кубика массой m каждый. Кубики соединены пружиной жесткостью k.

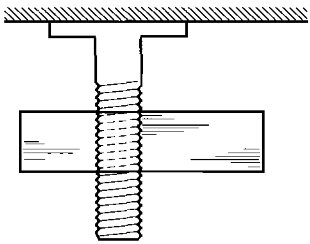


Рис. 7.26

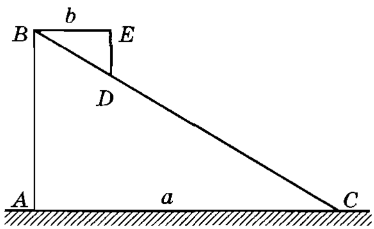


Рис. 7.27

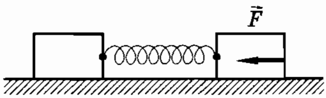


Рис. 7.28

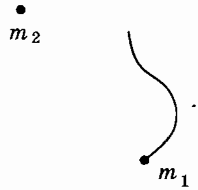


Рис. 7.29

Длина пружины в нерастянутом состоянии l_0. На правый кубик начинает действовать постоянная горизонтальная сила $\vec{F}$ (рис. 7.28). Найдите минимальное и максимальное расстояния между кубиками при движении системы.

11. Внутри сферы массой M и радиусом R находится небольшой шарик массой m. При отсутствии внешних сил шарик движется по экватору внутренней оболочки сферы. Период его обращения равен T. Найдите силу давления шарика на поверхность сферы.

12. Две взаимодействующих между собой частицы образуют замкнутую систему, центр масс которой покоится. На рисунке 7.29 показаны положения обеих частиц в некоторый момент времени и траектория частицы массой m_1. Постройте траекторию частицы массой m_2, если $m_2 = \frac{1}{2} m_1$.

§ 7.6. ДРУГАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПО ОКРУЖНОСТИ

Прежде чем перейти к изучению вращательного движения твердого тела, рассмотрим новую форму записи уравнения движения материальной точки по окружности. Введем новые понятия: момент инерции, момент силы и момент импульса. Именно с помощью этих понятий можно записать уравнение движения твердого тела при его вращении вокруг оси.

При рассмотрении кинематики движения точки по окружности (см. § 27 гл. 1) было установлено, что ускорение точки $\vec{a}$ целесообразно разложить на нормальную $\vec{a}_n$ и тангенциальную $\vec{a}_\tau$ составляющие, модули которых соответственно равны:

$$a_n = \omega^2 R,\ a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Нормальная составляющая характеризует изменение скорости только по направлению, а тангенциальная — только по модулю. Соответственно второй закон Ньютона для проекций a_n и a_τ ускорения запишется так:

$$ma_n = F_n,\ ma_\tau = F_\tau,$$

где F_n — проекция силы на направление, перпендикулярное скорости, а F_τ — проекция силы на направление скорости.

Второе из этих уравнений перепишем, используя связь тангенциального a_τ и углового β ускорений ($a_\tau = \beta R$):

$$mR\beta = F_\tau. \tag{7.6.1}$$

Момент силы

Пусть к материальной точке приложена сила, действующая в плоскости движения.

Угловое ускорение, как это следует из уравнения (7.6.1), определяется тангенциальной составляющей силы $\vec{F}$. Например, силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ (рис. 7.30) создают одно и то же ускорение β, так как для них составляющие $\vec{F}_\tau$ одинаковы.

Обозначим через α угол между вектором силы $\vec{F}$ и радиусом-вектором $\vec{R}$ рассматриваемой материальной точки. Тогда

$$F_\tau = F\sin\alpha. \tag{7.6.2}$$

Назовем расстояние d между центром окружности O и линией действия силы плечом силы. Из рисунка 7.31 видно, что

$$d = R\sin\alpha. \tag{7.6.3}$$

В частности, для силы $\vec{F}_1$ (см. рис. 7.30) угол $\alpha = 90°$ и, следовательно, $d_1 = R$, т. е. плечо силы равно радиусу окружности.

Произведение модуля F_τ тангенциальной составляющей на радиус R назовем моментом силы и обозначим буквой M.

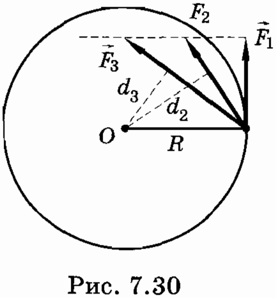


Рис. 7.30

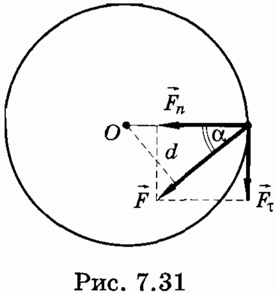


Рис. 7.31

Из формул (7.6.2) и (7.6.3) следует, что

$$M = F_\tau R = FR\sin\alpha = Fd. \qquad (7.6.4)$$

Запишем уравнение (7.6.1) в другой форме, используя понятие момента силы. Для этого умножим левую и правую части этого уравнения на R. На основании равенства (7.6.4) получим:

$$mR^2\beta = M. \qquad (7.6.5)$$

Таким образом, при постоянных значениях m и R момент силы определяет угловое ускорение.

Однако с таким же успехом при заданном R угловое ускорение может определяться величинами $F_\tau R^2$, $F_\tau R^3$ и т. д. Поэтому возникает вопрос о том, почему мы выбираем в качестве характеристики силового воздействия именно момент силы $M = F_\tau R$, а не какую-либо другую комбинацию величин F_τ, R. Причина такого выбора состоит в следующем.

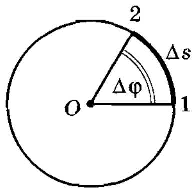


Рис. 7.32

Сравним движение материальной точки по окружности с прямолинейным движением. Между кинематическими характеристиками в этих случаях имеется следующее соответствие: линейному перемещению Δs соответствует угловое перемещение $\Delta\varphi$, линейной скорости v — угловая скорость ω, линейному ускорению a — угловое ускорение β.

Каково же будет соответствие между динамическими характеристиками? Начнем с силы. Рассмотрим выражение для работы. При движении по окружности работа совершается тангенциальной составляющей $\vec{F}_\tau$ силы. Нормальная составляющая не совершает работы.

Таким образом, при перемещении по окружности на малое расстояние Δs (рис. 7.32) совершается элементарная работа

$$\Delta A = F_\tau \Delta s. \qquad (7.6.6)$$

Введем вместо линейной характеристики перемещения Δs угловое $\Delta\varphi$. Они связаны равенством $\Delta s = R\Delta\varphi$.

Используя это соотношение, перепишем выражение (7.6.6) в виде:

$$\Delta A = F_\tau R\Delta\varphi = M\Delta\varphi. \qquad (7.6.7)$$

Отсюда следует, что если вместо линейного перемещения использовать угловое, то роль силы будет играть величина $F_\tau R$, т. е. момент силы M.

Знак момента силы

В определении момента силы (7.6.4) не учтено, что сила имеет направление и может как увеличивать угловую скорость, так и уменьшать ее. Это обстоятельство можно учесть так. Будем считать одно из направлений обращения точки, например против движения часовой стрелки, положительным. Тогда моменту силы условимся приписывать знак плюс, если сила увеличивает скорость обращения точки в направлении против часовой стрелки, и знак «минус» в противоположном случае.

Момент инерции

Мы установили, что при описании движения по окружности вместо величин r, v, a, F удобнее использовать величины φ, ω, β, M. Какая же величина соответствует массе? Из уравнения (7.6.5) видно, что роль массы при движении по окружности играет величина mR^2. Назовем ее м о м е н т о м и н е р ц и и и обозначим буквой J:

$$\boxed{J = mR^2.} \qquad (7.6.8)$$

Используя это обозначение, запишем уравнение движения материальной точки по окружности в форме:

$$\boxed{J\beta = M.} \qquad (7.6.9)$$

Итак, мерой инертности при движении материальной точки по окружности служит момент инерции. То, что инертность при движении по окружности зависит от радиуса, легко почувствовать. Например, камень на длинной веревке раскрутить труднее, чем на короткой.

Подчеркнем еще раз, что исходное уравнение движения $ma_\tau = F_\tau$ и уравнение (7.6.9) эквивалентны. Использование того или иного из них при описании движения материальной точки определяется соображениями удобства и простоты.

Момент импульса

В главе 2, посвященной второму закону Ньютона, были рассмотрены две формы записи уравнения движения:

$$m\vec{a} = F; \quad \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}. \qquad (7.6.10)$$

Из второго уравнения (7.6.10) следует, что изменение вектора импульса $m\vec{v}$ определяется импульсом силы $\vec{F}dt$. Такая форма записи очень удобна при решении многих задач.

Запишем в соответствующем виде уравнение движения материальной точки по окружности. Для этого преобразуем левую часть уравнения (7.6.9).

По определению угловое ускорение $\beta = \frac{d\omega}{dt}$. Учитывая, что момент инерции материальной точки $J = mR^2$ не зависит от времени, можем записать:

$$J\beta = J\frac{d\omega}{dt} = \frac{d(J\omega)}{dt}. \tag{7.6.11}$$

Выясним физический смысл величины $J\omega$. Перепишем это выражение в иной форме. Так как $J = mR^2$ и $R\omega = v$, то

$$J\omega = mvR. \tag{7.6.12}$$

Выражение mvR естественно назвать м о м е н т о м и м п у л ь с а.

Используя равенство (7.6.11), уравнение (7.6.9) можем записать в виде:

$$\frac{d(J\omega)}{dt} = M \text{ или } d(J\omega) = Mdt. \tag{7.6.13}$$

Приходим к выводу: **изменение момента импульса определяется импульсом момента силы**, т. е. величиной Mdt.

Для момента импульса будем использовать специальное обозначение $J\omega = L$. Тогда уравнение (7.6.13) примет вид:

$$\boxed{\frac{dL}{dt} = M,} \tag{7.6.14}$$

где $L = J\omega = mvR$ — момент импульса. Скоро мы увидим, что момент импульса, подобно импульсу, сохраняется в замкнутых системах.

Для динамического описания движения материальной точки по окружности мы ввели новые величины: момент силы, момент инерции и момент импульса. Был записан второй закон Ньютона в новой форме. Эта форма чрезвычайно удобна для перехода к динамике вращательного движения твердого тела.

§ 7.7. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Твердое тело можно представить как совокупность материальных точек. При вращении тела все эти точки имеют одинаковые угловые скорости и ускорения. Используя результаты § 7.6, сравнительно несложно получить уравнение движения твердого тела при его вращении вокруг неподвижной оси.

Уравнение движения

Для вывода основного уравнения динамики вращательного движения можно поступить следующим образом. Разделить мысленно тело на отдельные, достаточно малые элементы, которые можно было бы рассматривать как материальные точки (рис. 7.33). Записать для каждого элемента уравнение (7.6.13), и все эти уравнения почленно сложить. При этом внутренние силы, действующие между отдельными элементами, в уравнение движения тела не войдут. Сумма их моментов в результате сложения уравнений окажется равной нулю, так как по третьему закону Ньютона силы взаимодействия равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны. Учитывая далее, что при вращении твердого тела все его точки совершают одинаковые угловые перемещения с одинаковыми скоростями и ускорениями, можно таким образом получить уравнение вращательного движения всего тела.

Однако вывод этого уравнения довольно громоздок, поэтому мы на нем останавливаться не будем. Тем более что это уравнение имеет такую же форму, что и уравнение (7.6.13) для материальной точки, движущейся по окружности:

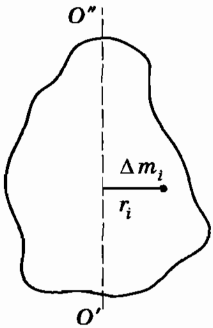


Рис. 7.33

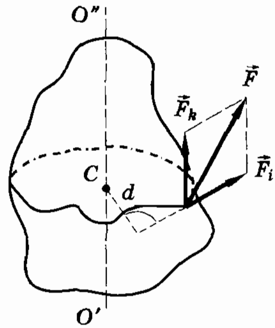


Рис. 7.34

$$\frac{d(J\omega)}{dt} = M. \qquad (7.7.1)$$

В этом уравнении $J\omega = L$ — момент импульса тела, а $M = \sum_i M_i$ — суммарный момент всех внешних сил, действующих на тело относительно оси вращения.

Читается уравнение (7.7.1) так: **производная по времени от момента импульса равна суммарному моменту внешних сил.**

Следует иметь в виду, что вращение тела вокруг оси могут вызывать лишь силы $\vec{F}_i$, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси вращения (рис. 7.34). Силы же $\vec{F}_k$, направленные параллельно оси вращения, очевидно, способны вызвать лишь перемещение тела вдоль оси. Момент каждой силы $\vec{F}_i$ равен взятому со знаком плюс или минус произведению модуля этой силы на плечо d, т. е. на длину отрезка перпендикуляра, опущенного из точки C оси на линию действия силы $\vec{F}_i$:

$$M_i = \pm F_i d. \qquad (7.7.2)$$

Момент силы, вращающий тело вокруг данной оси против часовой стрелки, считается положительным, а по часовой стрелке — отрицательным.

Момент инерции тела

В формулу (7.7.1) входит момент инерции тела J. Момент инерции тела J равен сумме моментов инерции ΔJ_i отдельных малых элементов, на которые можно разбить все тело:

$$J = \sum_i \Delta J_i. \qquad (7.7.3)$$

Так как момент инерции материальной точки

$$\Delta J_i = \Delta m_i r_i^2, \qquad (7.7.4)$$

где Δm_i — масса элемента тела, а r_i — его расстояние до оси вращения (см. рис. 7.33), то

$$J = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i r_i^2. \qquad (7.7.5)$$

Момент инерции тела зависит не только от массы тела, но и от характера распределения этой массы. Чем больше вытянуто

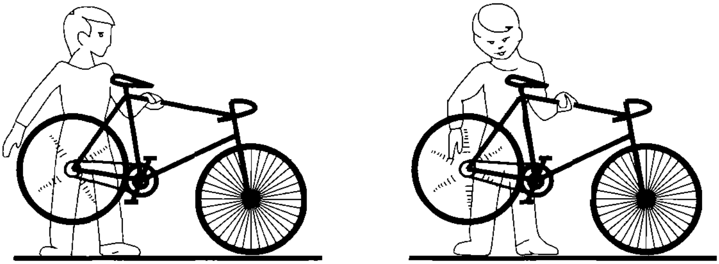


Рис. 7.35

тело вдоль оси вращения, тем меньше его момент инерции, так как тем ближе к оси вращения расположены отдельные элементы тела. Очевидно также, что, изменив ось вращения тела, мы тем самым изменим и его момент инерции. У твердых тел момент инерции относительно данной оси — постоянная величина. Поэтому изменение момента импульса может происходить лишь за счет изменения угловой скорости. Соответственно уравнение (7.7.1) можно записать в виде:

$$J\frac{d\omega}{dt} = M. \qquad (7.7.6)$$

Читается это уравнение так: **произведение момента инерции тела относительно оси вращения на угловое ускорение тела равно сумме моментов (относительно той же оси) всех внешних сил, приложенных к телу.**

Уравнение (7.7.6) показывает, что при вращении тела момент инерции играет роль массы, момент силы — роль силы, а угловое ускорение — роль линейного ускорения при движении материальной точки или центра масс.

В том, что угловое ускорение определяется действительно моментом силы, т. е. силой и плечом, а не просто силой, убедиться нетрудно. Так, раскрутить велосипедное колесо до одной и той же угловой скорости одной и той же силой (например, усилием пальца) можно гораздо быстрее, если прикладывать силу к ободу колеса (это создает больший момент), а не к спицам вблизи втулки (рис. 7.35).

Для того чтобы убедиться в том, что угловое ускорение определяется именно моментом инерции, а не массой тела, нужно иметь в распоряжении тело, форму которого можно легко изменять, не меняя массы. Велосипедное колесо здесь непригодно. Но можно воспользоваться своим собственным телом. Попробуйте закрутиться на пятке, оттолкнувшись от пола другой ногой. Если вы при этом прижмете руки к груди, то угловая скорость окажется большей, чем если вы раскинете руки в стороны. Эффект будет особенно заметным, если в обе руки взять по толстой книге.

Моменты инерции обруча и цилиндра

Найти момент инерции тела произвольной несимметричной формы довольно сложно. Проще его измерить опытным путем, чем вычислить.

Мы ограничимся вычислением момента инерции тонкого обруча, вращающегося вокруг оси, проходящей через его центр. Если масса колеса сосредоточена главным образом в его ободе (как, например, у велосипедного колеса), то такое колесо приближенно можно рассматривать как обруч, пренебрегая массой спиц и втулки.

Разобьем обруч на N одинаковых элементов. Если m — масса всего обруча, то масса каждого элемента $\Delta m_i = \frac{m}{N}$. Толщину обруча будем считать много меньшей ее радиуса (рис. 7.36). Если число элементов выбрать достаточно большим, то каждый элемент можно рассматривать как материальную точку. Поэтому момент инерции произвольного элемента с номером i будет равен:

$$\Delta J_i = \Delta m_i R^2. \qquad (7.7.7)$$

Подставляя выражение (7.7.7) в формулу (7.7.5) для полного момента инерции, получим:

$$J = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i R^2 = mR^2. \qquad (7.7.8)$$

Здесь мы учли, что расстояние R для всех элементов одинаково и что сумма масс элементов $\sum_i \Delta m_i$ равна массе m обруча.

Получился очень простой результат: момент инерции обруча равен произведению его массы на квадрат радиуса. Момент инерции обруча данной массы тем больше, чем больше его радиус. Формула (7.7.8) определяет также момент инерции

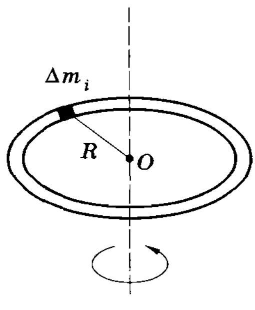


Рис. 7.36

полого тонкостенного цилиндра при его вращении вокруг оси симметрии.

Вычисление момента инерции сплошного однородного цилиндра массой m и радиусом R относительно его оси симметрии представляет более сложную задачу. Мы приведем лишь результат расчета:

$$J = \frac{1}{2}mR^2. \qquad (7.7.9)$$

Следовательно, если сравнить моменты инерции двух цилиндров одинакового размера и массы, один из которых полый, а другой сплошной, то у второго цилиндра момент инерции будет в два раза меньше. Это связано с тем, что у сплошного цилиндра масса расположена в среднем ближе к оси вращения.

Мы познакомились с уравнением вращательного движения твердого тела. По форме оно похоже на уравнение для поступательного движения твердого тела. Дано определение новых физических величин, характеризующих твердое тело: момента инерции и момента импульса.

§ 7.8. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Поступательное и вращательное движения твердого тела мы изучали по отдельности. Рассмотрим теперь плоское (или плоскопараллельное) движение, кинематика которого исследовалась в § 7.1. Плоское движение можно рассматривать как вращательное движение вокруг оси, которая перемещается поступательно. Примером плоского движения служит качение колеса.

Наиболее удобным оказывается такой способ описания плоского движения, при котором качение колеса рассматривается как сложение его поступательного движения и вращения относительно центра масс колеса. То же самое имеет место и при произвольном плоском движении.

Для описания плоского движения достаточно записать уравнение движения его центра масс и уравнение для вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс:

$$m\frac{dv_c}{dt} = F, \quad J\frac{d\omega}{dt} = M. \qquad (7.8.1)$$

Первое уравнение описывает поступательное движение тела. Если бы не было вращения, то все точки тела перемещались бы так же, как и центр масс. В отсутствие поступательного движения второе уравнение описывало бы вращение тела вокруг неподвижной оси.

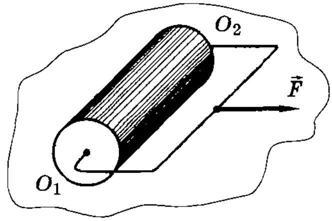


Рис. 7.37

В качестве примера применения уравнений плоского движения (7.8.1) рассмотрим качение цилиндра. На рисунке 7.37 изображен сплошной цилиндр. К оси цилиндра O_1O_2 прикреплена рамка, на которую действует сила $\vec{F}$. Кроме силы $\vec{F}$ на цилиндр действуют еще такие силы: сила тяжести $\vec{F}_т$, сила реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{f}$. Так как ускорение вдоль вертикали отсутствует, то силы $\vec{F}_т$ и $\vec{N}$ взаимно уравновешиваются.

Запишем первое уравнение системы (7.8.1) для движения центра масс:

$$ma_c = F - f. \qquad (7.8.2)$$

Все силы, кроме силы трения f, имеют относительно оси цилиндра плечо, равное нулю[1]. Момент силы трения $M = fR$, где R — радиус цилиндра. Поэтому уравнение вращательного движения имеет вид:

$$J\frac{d\omega}{dt} = fR \text{ или } J\beta = fR. \qquad (7.8.3)$$

При качении цилиндра без проскальзывания линейная и угловая скорости связаны равенством

$$v_c = \omega R. \qquad (7.8.4)$$

Если $R = \text{const}$, то так же связаны ускорения:

$$a_c = \beta R. \qquad (7.8.5)$$

---

[1] В системе отсчета, связанной с движущейся осью цилиндра O_1O_2, на все элементы цилиндра действуют силы инерции $\vec{F}_i = -\Delta m_i \vec{a}_c$. Но суммарный момент этих сил для однородного цилиндра относительно его оси равен нулю.

Следовательно, мы имеем три уравнения — (7.8.2), (7.8.3), (7.8.5) — для определения трех неизвестных a_c, β, f.

Найдем силу трения. Исключая угловое ускорение β из уравнений (7.8.3) и (7.8.5), получим:

$$a_c = f\frac{R^2}{J}. \tag{7.8.6}$$

Далее из уравнений (7.8.2) и (7.8.6) исключим ускорение a_c.

Сила трения равна:

$$f = \frac{F}{1 + \frac{mR^2}{J}}. \tag{7.8.7}$$

Для сплошного цилиндра $J = \frac{1}{2}mR^2$ и сила трения оказывается равной

$$f_1 = \frac{1}{3}F. \tag{7.8.8}$$

Если цилиндр полый, то $J = mR^2$ и $f_2 = \frac{1}{2}F$. Для полого цилиндра сила трения больше, чем для сплошного. Но, разумеется, она меньше максимальной силы трения покоя. Зная силу трения, легко найти ускорение центра масс по формуле (7.8.6).

Плоское движение описывается с помощью двух уравнений движения и одного кинематического соотношения, связывающего угловое ускорение с ускорением центра масс.

§ 7.9. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

В механике, как мы уже говорили, имеется три закона сохранения: импульса, энергии и момента импульса. Все они являются следствиями законов движения. Мы не будем столь же детально рассматривать закон сохранения момента импульса, как два других закона сохранения. Ограничимся лишь простыми частными случаями.

Если при вращении тела вокруг неподвижной оси момент внешних сил относительно этой оси равен нулю, то, согласно уравнению (7.7.1), равна нулю производная момента импульса тела:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(J\omega)}{dt} = 0. \qquad (7.9.1)$$

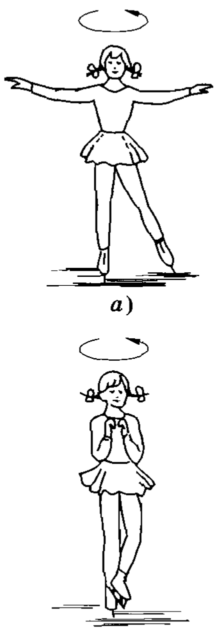
Это означает, что сам момент импульса остается постоянным:

$$J\omega = \text{const}. \qquad (7.9.2)$$

Из неизменности момента инерции J твердого тела, вращающегося вокруг определенной оси, следует постоянство угловой скорости вращения. Так, если бы не было трения, то не менялась бы угловая скорость вращающегося на оси колеса.

Уравнение (7.9.2) и является формой записи закона сохранения момента импульса для частного случая вращения тела вокруг неподвижной оси. В общем виде этот закон формулируется так: **в замкнутой системе тел полный (суммарный) момент импульса остается постоянным.**

Если момент внешней силы, действующей на тело, равен нулю, то уравнение (7.9.2) выполняется и в том случае, когда тело не является твердым, т. е. когда момент его инерции может изменяться. Причем в этом случае закон сохранения момента импульса позволяет простым путем получить важные заключения о характере вращения тела.


а)

б)

Рис. 7.38

Все вы могли видеть, как балерина или конькобежец-фигурист легко меняет скорость своего вращения, не отталкиваясь от пола или льда. На рисунке 7.38, *а* изображена фигуристка, которая, оттолкнувшись ото льда, вращается с угловой скоростью ω_0. Затем она изменяет положение тела: выпрямляется и прижимает руки к корпусу (рис. 7.38, *б*). Легко заметить, что угловая скорость ее при этом заметно увеличивается и становится равной некоторому значению $\omega_1 > \omega_0$. Докажем, что это изменение скорости есть следствие закона сохранения момента импульса (7.9.2). Обозначим через J_0 и J_1 моменты инерции фигуристки в начальном (сразу после толчка) и конечном состояниях. Момент инерции в конечном состоянии, когда фигуристка выпрямляется и прижимает руки к корпусу, меньше момента инерции

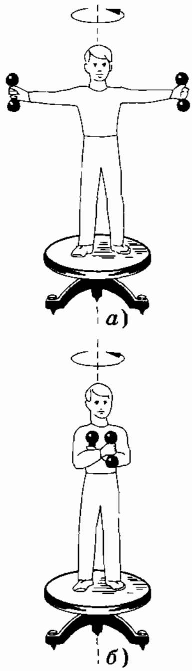


Рис. 7.39

J_0, так как ее масса сосредоточивается ближе к оси вращения. После толчка момент внешних сил становится равным нулю, если пренебречь трением, и поэтому момент импульса должен сохраняться. На этом основании можно написать, что

$$J_0\omega_0 = J_1\omega_1. \qquad (7.9.3)$$

Так как $J_1 < J_0$, то отсюда вытекает неравенство:

$$\omega_1 = \frac{J_0}{J_1}\omega_0 > \omega_0. \qquad (7.9.4)$$

То же явление можно наблюдать по-другому. Человек становится на круглую платформу, которая может вращаться вокруг вертикальной оси без заметного трения. Оттолкнувшись затем от пола, он начинает вращаться. Меняя далее положение рук (лучше с тяжелыми предметами в ладонях), т. е. меняя момент инерции тела, человек тем самым меняет и угловую скорость вращения (рис. 7.39, *а*, *б*).

Мы познакомились с третьим законом сохранения в механике — законом сохранения момента импульса. Он выполняется во всех без исключения случаях, как и закон сохранения импульса.

§ 7.10. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

На краю горизонтальной платформы массой m и радиусом R, которая может свободно вращаться относительно оси $O'O''$, закреплена небольшая пушка (рис. 7.40). Платформа вначале покоится. Затем из пушки производится выстрел. Снаряд летит по касательной к краю платформы со скоростью $\vec{v}$. Масса снаряда $m_с$, масса пушки $m_п$. Определите угловую скорость платформы после выстрела. Пушку и снаряд можно рассматривать как материальные точки.

Решение. До выстрела момент внешних сил, действующих на пушку и платформу, равен нулю. Он равен нулю и после выстрела, так как при выстреле между пушкой и снарядом действуют лишь внутренние силы, суммарный момент которых равен нулю. Вследствие этого суммарный момент импульса снаряда, пушки и платформы остается неизменным. До выстрела он был равен нулю. Следовательно, он будет равняться нулю и после выстрела. Это означает, что момент импульса, которым обладает снаряд, равен по модулю и противоположен по знаку моменту импульса платформы и пушки.

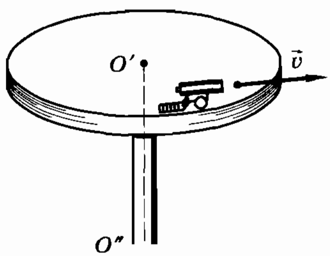


Рис. 7.40

Момент импульса снаряда равен произведению импульса снаряда $m_с v$ на плечо, т. е. $m_с vR$. Момент импульса платформы и пушки состоит из двух частей: момента импульса пушки $m_п R^2\omega$ и момента импульса платформы $\frac{1}{2}mR^2\omega$ (здесь учтено, что пушка рассматривается как материальная точка; для момента инерции платформы использована формула (7.7.3)).

Учитывая, что момент импульса снаряда равен по модулю суммарному моменту импульса пушки и платформы, получим равенство:

$$m_с vR = m_п R^2\omega + \frac{1}{2}mR^2\omega.$$

Отсюда находим угловую скорость вращения:

$$\omega = \frac{m_с v}{\left(m_п + \frac{1}{2}m\right)R}.$$

Задача 2

Через блок, представляющий собой сплошной диск радиусом R, перекинута нить. На нити подвешены грузы массами m_1 и m_2 ($m_2 > m_1$). Масса блока m (рис. 7.41). Определите разность сил натяжения нитей с обеих сторон блока и ускорение грузов. Считать, что нить нерастяжима и не может скользить по блоку.

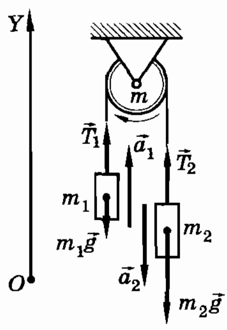


Рис. 7.41

Решение. Обозначим силы натяжения нитей через $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, ускорения грузов через $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$.

Направим ось координат по вертикали снизу вверх. Запишем уравнения движения грузов:

$$m_1a_1 = T_1 - m_1g; \quad -m_2a_2 = T_2 - m_2g. \qquad (7.10.1)$$

Нить нерастяжима, поэтому ускорения $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ равны по модулю: $a_1 = a_2$.

Исключая с помощью этого условия ускорение a_2 из второго уравнения движения, получим:

$$m_1a_1 = T_1 - m_1g; \quad m_2a_1 = m_2g - T_2. \qquad (7.10.2)$$

Чтобы получить уравнение, содержащее разность сил натяжения нитей, сложим уравнения (7.10.2):

$$(m_1 + m_2)a_1 = (m_2 - m_1)g - (T_2 - T_1). \qquad (7.10.3)$$

Теперь рассмотрим уравнение вращательного движения блока. Учитывая, что моменты, создаваемые силами $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, имеют противоположные знаки, получим уравнение:

$$J\beta = (T_2 - T_1)R, \qquad (7.10.4)$$

где J — момент инерции блока; β — его угловое ускорение.

Угловое и линейное ускорения связаны соотношением $a_1 = \beta R$, поэтому уравнение (7.10.4) можно записать так:

$$\frac{J}{R^2}a_1 = T_2 - T_1. \qquad (7.10.5)$$

Из уравнений (7.10.3) и (7.10.5) находим искомые величины:

$$a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}}g, \qquad (7.10.6)$$

$$T_2 - T_1 = \frac{m_2 - m_1}{(m_1 + m_2)R^2 + J}Jg. \qquad (7.10.7)$$

Так как по условию $m_2 > m_1$, то $a_1 > 0$, т. е. ускорение первого груза направлено вверх, а второго — вниз. Из выражения (7.10.7) следует, что $T_2 > T_1$. Это понятно, так как диск поворачивается по часовой стрелке.

Если момент инерции блока настолько мал, что выполняется условие

$$J << (m_1 + m_2)R^2,$$

то, как это следует из формулы (7.10.7),

$$T_2 - T_1 << (m_2 - m_1)g,$$

т. е. разность сил натяжения нитей много меньше силы $(m_2 - m_1)g$.

Если пренебречь моментом инерции блока ($J = 0$; невесомый блок), то из выражений (7.10.6) и (7.10.7) следует:

$$a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g; \quad T_2 = T_1.$$

Таким образом, в случае невесомого блока натяжение нитей оказывается равным (см. задачу 5 § 2.14).

Упражнение 14

1. Докажите, что кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равна:

$$E_k = \frac{J\omega^2}{2},$$

где J — момент инерции, а ω — угловая скорость.

2. Сплошной цилиндр радиусом R и массой m скатывается с наклонной плоскости с углом α. Определите ускорение центра масс цилиндра и силу трения.

3. Горизонтальная платформа массой m и радиусом R вращается с угловой скоростью ω. На краю платформы стоит человек массой m_1. С какой скоростью ω_1 будет вращаться платформа, если человек перейдет от края платформы к ее центру? Человека можно рассматривать как материальную точку.

4. На барабан с горизонтальной осью вращения радиусом $R = 0{,}5$ м намотан шнур, к концу которого привязан груз массой $m = 10$ кг. Найдите момент инерции барабана, если известно, что угловое ускорение $\beta = 2$ рад/с^2. Трением пренебречь.

5. Через блок массой $m = 10$ г перекинута нить, к концам которой привязаны грузы массами $m_1 = 10$ г и $m_2 = 15$ г. С каким ускорением движутся грузы? Блок считать сплошным диском.

Глава 8

СТАТИКА

До сих пор мы рассматривали разнообразные движения тел, их взаимодействия, вследствие которых у этих тел возникают ускорения. В этой главе мы займемся изучением условий, при которых тела под действием приложенных к ним сил не получают ускорений или, в частности, находятся в состоянии покоя.

§ 8.1. РАВНОВЕСИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Выясним, что представляет собой раздел механики, называемый статикой.

Статика

Сумма сил, приложенных к телу, может быть отличной от нуля или же равной нулю. В зависимости от этого скорость тела изменяется или же остается постоянной. В последнем случае тела будут находиться в покое или двигаться равномерно и прямолинейно. Здания, мосты, балки вместе с опорами, части машин, книга на столе и многие другие тела покоятся, несмотря на то что на них со стороны других тел действуют силы.

Если тело, к которому приложены силы, покоится, то говорят, что это тело находится в равновесии. Изучение условий равновесия тел имеет большое практическое значение в строительном деле, машиностроении, приборостроении и других областях техники.

Но выяснить условия равновесия реальных тел непросто, так как все реальные тела под влиянием приложенных к ним сил изменяют свою форму и размеры, или, как говорят, деформируются. А деформации существенно влияют на равновесие тел. Величина деформации зависит от различных условий: материала тела, его формы, модулей и направлений приложенных к телу сил. Деформации могут быть значительными, и тогда их легко заметить, например растяжение резинового шнура, изгиб тонкой металлической линейки и т. д. Малые деформации можно обнаружить при помощи специальных приборов.

Во многих случаях, которые имеют место на практике, деформациями можно пренебречь и вести расчет так, как если бы тела были недеформируемыми, т. е. абсолютно твердыми (см. § 7.1).

Изучив условия равновесия абсолютно твердого тела, мы тем самым найдем условия равновесия реальных тел в тех случаях, когда их деформациями можно пренебречь.

Раздел механики, в котором изучается равновесие абсолютно твердых тел, называется статикой.

В статике учитываются размеры и формы тел и все рассматриваемые тела считаются абсолютно твердыми. Статика является частным случаем динамики, так как покой тел, когда на них действуют силы, есть частный случай движения.

Деформации тел учитываются в прикладных разделах механики: теории упругости, сопротивлении материалов.

В статике изучается равновесие твердых тел. Статика является частным случаем динамики.

§ 8.2. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Выясним, при каких условиях тела находятся в равновесии.

Первое условие равновесия

Очевидно, что тело может покоиться только по отношению к одной определенной системе координат. В статике изучают условия равновесия тел именно в такой системе. При равновесии скорости и ускорения всех участков (элементов) тела равны нулю. Учитывая это, можно установить одно из необходимых условий равновесия тел, используя теорему о движении центра масс (см. § 7.4).

Внутренние силы не влияют на движение центра масс, так как их сумма всегда равна нулю. Определяют движение центра масс тела (или системы тел) лишь внешние силы. Так как при равновесии тела ускорение всех его элементов равно нулю, то равно нулю и ускорение центра масс. Но ускорение центра масс определяется векторной суммой внешних сил, приложенных к телу (см. формулу (7.4.2)). Поэтому при равновесии эта сумма должна равняться нулю.

Действительно, если сумма внешних сил $\vec{F}_i$ равна нулю, то и ускорение центра масс $a_c = 0$. Отсюда следует, что скорость центра масс $\vec{v}_c = \text{const}$. Если в начальный момент скорость центра масс равнялась нулю, то и в дальнейшем центр масс остается в покое.

Полученное условие неподвижности центра масс является необходимым (но, как мы скоро увидим, недостаточным) условием равновесия твердого тела. Это так называемое п е р в о е у с л о в и е р а в н о в е с и я. Его можно сформулировать следующим образом.

Для равновесия тела необходимо, чтобы сумма внешних сил, приложенных к телу, была равна нулю:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0. \qquad (8.2.1)$$

Если сумма сил равна нулю, то равна нулю и сумма проекций сил на все три оси координат. Обозначая внешние силы через $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ и т. д., получим три уравнения, эквивалентных одному векторному уравнению (8.2.1):

$$\begin{aligned} F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \ldots &= 0, \\ F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \ldots &= 0, \\ F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \ldots &= 0. \end{aligned} \qquad (8.2.2)$$

Для того чтобы тело покоилось, необходимо еще, чтобы начальная скорость центра масс была равна нулю.

Второе условие равновесия твердого тела

Равенство нулю суммы внешних сил, действующих на тело, необходимо для равновесия, но недостаточно. При выполнении этого условия лишь центр масс с необходимостью будет покоиться. В этом нетрудно убедиться.

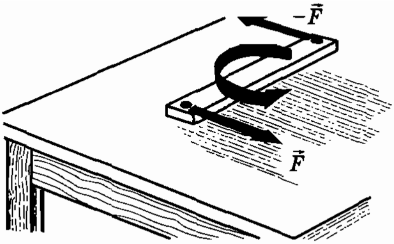


Рис. 8.1

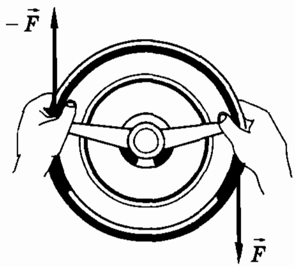


Рис. 8.2

Приложим к доске в разных точках равные по модулю и противоположные по направлению силы так, как показано на рисунке 8.1 (две такие силы называют п а р о й с и л). Сумма этих сил равна нулю: $\vec{F} + (-\vec{F}) = 0$. Но доска будет поворачиваться. В покое находится только центр масс, если его начальная скорость (скорость до приложения сил) была равна нулю.

Точно так же две одинаковые по модулю и противоположные по направлению силы поворачивают руль велосипеда или автомобиля (рис. 8.2) вокруг оси вращения.

Нетрудно понять, в чем здесь дело. Любое тело находится в равновесии, когда сумма всех сил, действующих на каждый его элемент, равна нулю. Но если сумма внешних сил равна нулю, то сумма всех сил, приложенных к каждому элементу тела, может быть и не равной нулю. В этом случае тело не будет находиться в равновесии. В рассмотренных примерах доска и руль потому и не находятся в равновесии, что сумма всех сил, действующих на отдельные элементы этих тел, не равна нулю. Тела вращаются.

Выясним, какое еще условие, кроме равенства нулю суммы внешних сил, должно выполняться, чтобы тело не вращалось и находилось в равновесии. Для этого воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения твердого тела (см. § 7.6):

$$J\beta = M. \qquad (8.2.3)$$

Напомним, что в формуле (8.2.3)

$$M = \sum_i M_i$$

представляет собой сумму моментов приложенных к телу внешних сил относительно оси вращения, а J — момент инерции тела относительно той же оси.

Если $\sum_i M_i = 0$, то и $\beta = 0$, т. е. тело не имеет углового ускорения, и, значит, угловая скорость тела

$$\omega = \text{const}.$$

Если в начальный момент угловая скорость равнялась нулю, то и в дальнейшем тело не будет совершать вращательное движение.

Следовательно, равенство

$$\sum_i M_i = 0 \qquad (8.2.4)$$

(при $\omega = 0$) является вторым условием, необходимым для равновесия твердого тела.

При равновесии твердого тела сумма моментов всех внешних сил, действующих на него относительно любой оси[1], равна нулю.

В общем случае произвольного числа внешних сил условия равновесия твердого тела запишутся в виде:

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots = 0, \\ M_1 + M_2 + M_3 + \ldots = 0. \end{array}} \qquad (8.2.5)$$

Эти условия необходимы и достаточны для равновесия любого твердого тела. Если они выполняются, то векторная сумма сил (внешних и внутренних), действующих на каждый элемент тела, равна нулю.

Равновесие деформируемых тел

Если тело не абсолютно твердое, то под действием приложенных к нему внешних сил оно может не находиться в равновесии, хотя сумма внешних сил и сумма их моментов относительно любой оси равна нулю. Это происходит потому, что под действием внешних сил тело может деформироваться и в про-

---

[1] Мы рассматривали моменты сил относительно реальной оси вращения тела. Но можно доказать, что при равновесии тела сумма моментов сил равна нулю относительно любой оси (геометрической линии), в частности относительно трех осей координат или относительно оси, проходящей через центр масс.

цессе деформации сумма всех сил, действующих на каждый его элемент, в этом случае не будет равна нулю.

Приложим, например, к концам резинового шнура две силы, равные по модулю и направленные вдоль шнура в противоположные стороны. Под действием этих сил шнур не будет находиться в равновесии (шнур растягивается), хотя сумма внешних сил равна нулю и равна нулю сумма их моментов относительно оси, проходящей через любую точку шнура.

При деформации тел, кроме того, происходит изменение плеч сил и, следовательно, изменение моментов сил при заданных силах. Отметим еще, что только у твердых тел можно переносить точку приложения силы вдоль линии действия силы в любую другую точку тела. Это не меняет момента силы и внутреннего состояния тела.

В реальных телах переносить точку приложений силы вдоль линии ее действия можно лишь тогда, когда деформации, которые вызывает эта сила, малы и ими можно пренебречь. В этом случае изменение внутреннего состояния тела при переносе точки приложения силы несущественно. Если же деформациями пренебречь нельзя, то такой перенос недопустим. Так, например, если вдоль резинового бруска к двум его концам приложить две равные по модулю и прямо противоположные по направлению силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 8.3, *а*), то брусок будет растянут. При переносе точек приложения этих сил вдоль линии действия в противоположные концы бруска (рис. 8.3, *б*) те же силы будут сжимать брусок и его внутреннее состояние окажется иным.

Для расчета равновесия деформируемых тел нужно знать их упругие свойства, т. е. зависимость деформаций от действующих сил. Эту сложную задачу мы решать не будем. Простые случаи поведения деформируемых тел будут рассмотрены в следующей главе.

Для равновесия твердого тела должны равняться нулю сумма внешних сил и сумма моментов сил, действующих на тело. Должны быть также равны нулю начальная скорость центра масс и угловая скорость вращения тела.

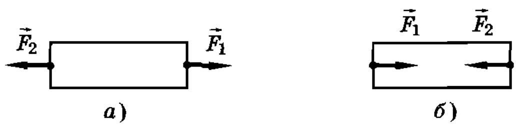


Рис. 8.3

§ 8.3. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

Настала пора более подробно остановиться на понятии центра тяжести. Предварительно представление об этой замечательной точке было дано в главе 3.

Центр тяжести

Момент силы зависит от ее плеча, а значит, и от точки приложения силы. Когда на тело действуют силы со стороны тросов, пружин и т. п., то положение точек приложения сил очевидно. Но что можно сказать о точке приложения силы тяжести?

Особенностью силы тяжести является то, что она действует на тело не в одной какой-то точке, а по всему объему тела. Силы тяжести, действующие на отдельные элементы тела, направлены к центру Земли и, следовательно, строго говоря, не будут параллельными. Однако размеры всех сооружений на Земле значительно меньше ее радиуса. Поэтому практически все эти силы можно считать параллельными.

Точка, через которую проходит равнодействующая всех параллельных сил тяжести, действующих на отдельные элементы тела (при любом положении тела в пространстве), **называется центром тяжести.**

Определение центра тяжести тела простой формы

Найдем вначале положение центра тяжести для наиболее простого случая, когда тело состоит из двух шаров различных масс, соединенных стержнем, массой которого можно пренебречь по сравнению с массами шаров. Кроме того, длину стержня будем считать значительно превышающей радиусы шаров. Тогда шары можно считать материальными точками (рис. 8.4, *а*). Итак, на материальные точки A и B, соединенные невесомым стержнем, действуют силы тяжести $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, параллельные друг другу. Геометрическая сумма этих сил представляет собой результирующую силу тяжести:

$$\vec{F}_т = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \qquad (8.3.1)$$

Она направлена к центру Земли, так же как и силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, а ее модуль равен сумме модулей слагаемых сил.

Положение центра тяжести, т. е. точки приложения результирующей силы, можно определить, используя тот простой

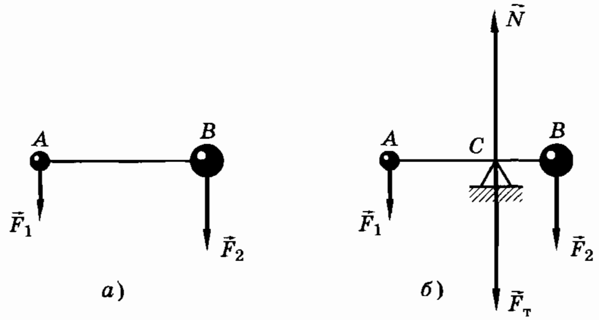


Рис. 8.4

факт, что тело, закрепленное на оси, проходящей через центр тяжести C, должно находиться в равновесии. Ведь относительно этой оси моменты сил тяжести $\vec{F}_т$ и силы реакции опоры $\vec{N}$ равны нулю, так как равны нулю плечи этих сил (рис. 8.4, *б*).

С другой стороны, согласно условию равновесия (8.2.5), можно записать: $F_1d_1 - F_2d_2 = 0$, где $d_1 = AC$ и $d_2 = CB$ — плечи сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Отсюда

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}. \qquad (8.3.2)$$

Равенство (8.3.2) определяет положение центра тяжести рассматриваемого тела. Точка приложения равнодействующей параллельных сил тяжести делит расстояние между точками приложения этих сил на отрезки, обратно пропорциональные модулям сил.

Нахождение центров тяжести тел является важной технической задачей, так как от положения центров тяжести зависит устойчивость мостов, плотин, зданий, телевизионных вышек, автомашин, ракет на старте и т. п. Нужно поэтому познакомиться с методами нахождения центров тяжести тел различной формы.

Нахождение центра тяжести тел

В технике и повседневной жизни мы встречаемся с телами самой различной формы. Часто они состоят из стержней и дисков (колесо на оси, спортивная штанга и т. д.). Многие плоские фигуры состоят из прямоугольных и треугольных пластин. При определении положения центра тяжести подобных тел проще всего вначале определить положение центров тяжести отдельных его частей простой формы. У тел простой формы

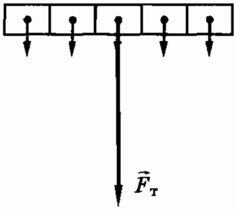


Рис. 8.5

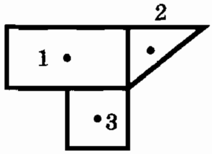


Рис. 8.6

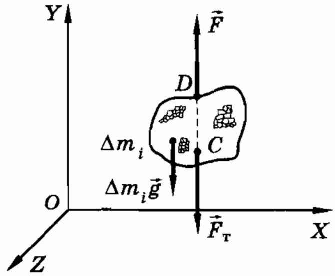


Рис. 8.7

можно сразу указать положение центра тяжести, руководствуясь соображениями симметрии.

Так, центр тяжести однородного стержня, очевидно, располагается в середине стержня (рис. 8.5). У всех однородных фигур, имеющих центр симметрии, центр тяжести совпадает с этим центром: у круга — с его геометрическим центром, у параллелограмма — с точкой пересечения диагоналей и т. д. При этом центр тяжести может находиться и вне тела (например, у кольца или пустотелой сферы).

Определив положения центров тяжести составных частей тела сложной формы, можно найти, где расположен центр тяжести всего тела. Для этого надо заменить тело системой материальных точек, каждая из которых помещается в центре тяжести соответствующей части тела и имеет массу этой части (рис. 8.6).

Координаты центра тяжести твердого тела

Рассмотрим теперь общий метод определения координат центра тяжести произвольного твердого тела. Для решения задачи предположим, что равнодействующая сил тяжести, приложенных к отдельным элементам тела, и точка ее приложения уже найдены.

Пусть сила тяжести равна $\vec{F}_т$ и приложена в точке C (рис. 8.7) с координатами x, y, z. Приложим теперь к телу в другой точке внешнюю силу $\vec{F}$ такую, чтобы тело находилось в равновесии. Это можно сделать, например, подвесив тело в точке D на нити или закрепив в этой точке другим способом. Так как в этом случае можно считать, что на тело действуют только две силы $\vec{F}$ и $\vec{F}_т$, то согласно условию равновесия (8.2.1):

$$\vec{F} + \vec{F}_т = 0. \qquad (8.3.3)$$

Отсюда следует, что сила $\vec{F}$ должна быть равна по модулю и противоположна по направлению силе $\vec{F}_т$.

Разобьем теперь мысленно тело на элементы (материальные точки) и запишем условие равновесия, уже не заменяя равнодействующей совокупность элементарных сил тяжести:

$$\vec{F} + \sum_i \Delta\vec{F}_{тi} = 0 \qquad (8.3.4)$$

(здесь $\Delta\vec{F}_{тi} = \Delta m_i\vec{g}$ — сила тяжести, действующая на произвольный малый элемент массой Δm_i).

Из (8.3.3) и (8.3.4) следует, что

$$\vec{F}_т = \sum_i \Delta\vec{F}_{тi} = \sum_i \Delta m_i\vec{g} = m\vec{g}$$

$\left(\text{здесь } m = \sum_i \Delta m_i \text{ — масса тела}\right)$.

Таким образом, равнодействующая направлена вниз и равна сумме всех элементарных сил тяжести.

Вспомним теперь, что рассматриваемое тело находится в покое. Это значит, что совокупное действие силы $\vec{F}$ и силы $\vec{F}_т$, заменяющей многочисленные элементарные силы тяжести, не вызывает вращения тела. Следовательно, выполняется условие равновесия (8.2.4) для моментов всех сил относительно любой неподвижной оси. В качестве таковой удобно взять одну из координатных осей, например ось OZ (рис. 8.8). Момент M равнодействующей $\vec{F}_т$ и момент M' силы $\vec{F}$ должны в сумме давать при равновесии нуль:

$$M' + M = 0. \qquad (8.3.5)$$

Очевидно, что условие (8.3.5) сводится к требованию, чтобы равные по модулю и противоположные по направлению силы $\vec{F}$ и $\vec{F}_т$ имели бы одну и ту же линию действия.

В то же время если не заменять элементарные силы тяжести равнодействующей, то условие равновесия (8.3.5) для моментов должно выполняться в виде

$$M' + \sum_i \Delta M_i = 0. \qquad (8.3.6)$$

Из уравнений (8.3.5) и (8.3.6) следует, что

$$M = \sum_i \Delta M_i,$$

т. е. момент равнодействующей относительно какой-нибудь неподвижной оси равен сумме моментов всех элементарных сил тяжести относительно той же оси.

Подсчитаем упомянутые моменты сил относительно оси OZ. Как известно, момент силы равен произведению силы на плечо. Для силы $\Delta\vec{F}_{\text{т}i}$ плечом является координата x_i элемента малой массы Δm_i (см. рис. 8.8). Поэтому момент силы $\Delta\vec{F}_{\text{т}i}$ равен: $\Delta\vec{F}_{\text{т}i}x_i = \Delta m_i x_i g$, а общий момент всех сил тяжести равен:

$$\sum_i \Delta M_i = \Delta m_1 x_1 g + \Delta m_2 x_2 g + \ldots = g\sum_i \Delta m_i x_i. \quad (8.3.7)$$

Мы предположили, что точка, в которой приложена суммарная сила $\vec{F}_{\text{т}}$, имеет координату x. Тогда суммарная сила создает момент относительно той же оси OZ, равный $F_{\text{т}}x = gx\sum_i \Delta m_i$.

Поскольку этот момент должен быть равен моменту, определяемому по формуле (8.3.7), то

$$g\sum_i \Delta m_i x_i = gx\sum_i \Delta m_i.$$

Отсюда для координаты точки приложения равнодействующей всех параллельных сил тяжести получаем:

$$x = \frac{\sum_i \Delta m_i x_i}{\sum_i \Delta m_i} = \frac{\sum_i \Delta m_i x_i}{m}, \quad (8.3.8)$$

где $m = \sum_i \Delta m_i$ — масса тела.

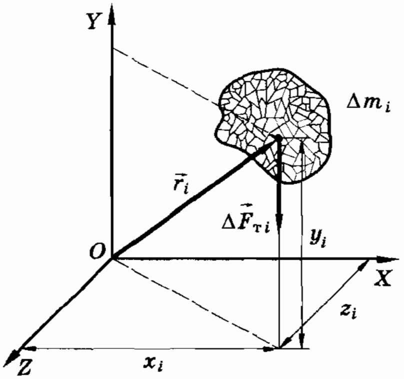


Рис. 8.8

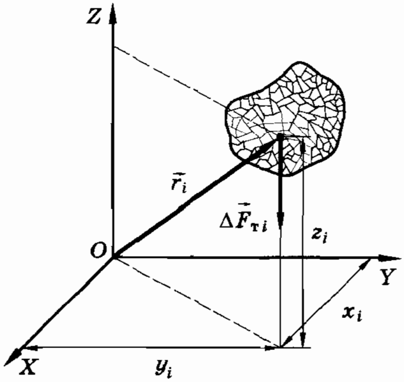


Рис. 8.9

Мы нашли только одну из координат точки приложения равнодействующей. Другие координаты остались неопределенными, что и понятно, поскольку найденную точку можно переносить, например, вверх или вниз без изменения момента сил относительно оси OZ.

Однако этот способ можно применить еще раз, повернув оси координат вместе с телом так, чтобы вверх теперь была направлена уже другая ось (рис. 8.9). Найдем вторую координату точки приложения суммарной силы:

$$y = \frac{\sum_i \Delta m_i y_i}{\sum_i \Delta m_i} = \frac{\sum_i \Delta m_i y_i}{m}, \tag{8.3.9}$$

а затем и третью:

$$z = \frac{\sum_i \Delta m_i z_i}{\sum_i \Delta m_i} = \frac{\sum_i \Delta m_i z_i}{m}. \tag{8.3.10}$$

Координаты центра тяжести, следовательно, определяются по формулам (8.3.8), (8.3.9), (8.3.10). Если использовать векторную форму записи, то все эти три формулы будут эквивалентны одной:

$$\boxed{\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec{r}_i \,.} \tag{8.3.11}$$

Центр тяжести и центр масс

Нетрудно заметить, что формула (8.3.11) совпадает с выражениями (7.3.4), которые определяют положение центра масс тела. Таким образом, в случае, когда размеры тела малы по сравнению с расстоянием до центра земного шара, центр тяжести совпадает с центром масс тела.

Кроме того, очевидно, что высказанные положения применимы и к расчету положения точки приложения силы инерции при поступательном движении. В самом деле, для такого расчета мы можем аналогичным образом разбить тело на малые элементы, к каждому из которых будет приложена сила инерции $-\Delta m_i \vec{a}$, где $\vec{a}$ — ускорение системы отсчета. Как и при нахождении центра тяжести, все силы инерции параллельны и пропорциональны массам отдельных элементов. Поэтому сила инерции в неинерциальной системе отсчета, движущейся поступательно, приложена всегда к центру масс (центру тяжести) тела. Наоборот, центробежная сила инерции в общем случае не приложена к центру масс, так как из-за различных расстояний до оси вращения на элементы даже одинаковой массы действуют в неинерциальной системе отсчета различные центробежные силы инерции.

Мы получили более полное представление о центре тяжести. Практически во всех встречающихся задачах центр тяжести тела совпадает с его центром масс.

§ 8.4. ВИДЫ РАВНОВЕСИЯ. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ ТЕЛ

Мы познакомились с условиями, при которых тело находится в равновесии. Но надо еще выяснить, от чего зависит надежность, устойчивость достигнутого состояния равновесия.

Виды равновесия

При равновесии тела равны нулю сумма внешних сил, действующих на него, и сумма моментов этих же сил относительно любой оси. Однако равновесие тела может быть различным в зависимости от распределения массы тела по объему и расположения его по отношению к окружающим телам. Чаще всего необходимо, чтобы равновесие было устойчивым, т. е. таким, при котором после выведения тела из положения равновесия оно возвращалось в это положение.

В некоторых случаях равновесие трудно сохранить. Попробуйте, например, длительное время стоять на канате (рис. 8.10). В то же время кукла неваляшка (ванька-встанька) каждый раз возвращается в положение равновесия, как бы мы ее ни наклоняли (рис. 8.11). Трудно палку удержать на кончике пальца в

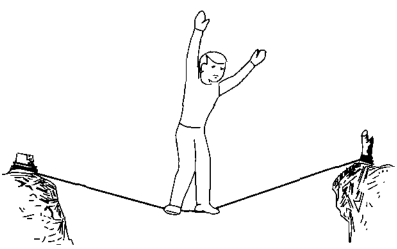


Рис. 8.10

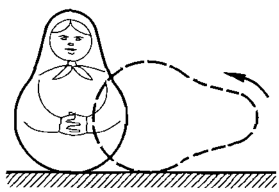


Рис. 8.11

вертикальном положении, но она будет в устойчивом положении, если ее повесить на руку (рис. 8.12). Когда равновесие какого-либо тела или сооружения может быть нарушено под влиянием небольших воздействий, оно называется неустойчивым. В этом случае сооружение опасно, если размеры его велики. Опасны также в горах неустойчиво лежащие камни, опасен снег на крутых склонах. Неосторожный шаг или порыв ветра могут вызвать камнепад. Снежный склон, подрезанный лыжником, может лавиной обрушиться вниз.

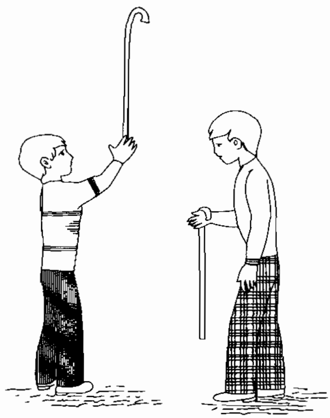


Рис. 8.12

Выясним на простых примерах условия устойчивого равновесия. Пусть шарик покоится на дне вогнутой сферической чаши (рис. 8.13). Сместим немного шарик из равновесия на дне вогнутой поверхности. Если шарик отпустить, то он возвращается в первоначальное положение.

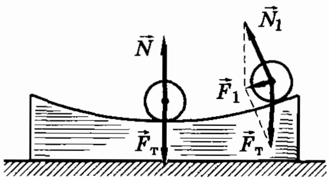


Рис. 8.13

Объяснить это можно так: в отклоненном положении сила тяжести и реакция опоры не уравновешиваются и дают равнодействующую $\vec{F}_1$, которая возвращает тело в первоначальное положение. Значит, положение шарика является у с т о й ч и в ы м.

Сместим немного шарик из положения равновесия на выпуклой поверхности (рис. 8.14). Теперь шарик в положение равновесия не возвращается. Равнодействующая в этом случае направлена так, что она еще дальше перемещает тело от положения равновесия. В таком случае говорят, что равновесие тела является н е у с т о й ч и в ы м.

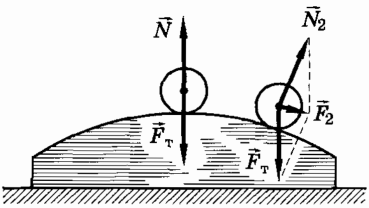


Рис. 8.14

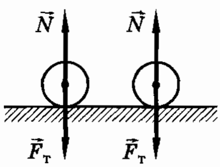
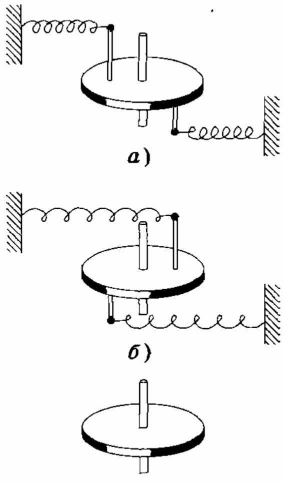


Рис. 8.15



а)

б)

в)

Рис. 8.16

Если смещать шарик на гладкой горизонтальной поверхности, то он остается в равновесии. Такое равновесие называется **безразличным**. Оно сохраняется при всех смещениях и поворотах тела (рис. 8.15).

Мы пока говорили только о возникновении сил при смещении тела из положения равновесия. То же самое можно сказать и о возникновении моментов сил.

Рассмотрим, например, систему, изображенную в состоянии равновесия на рисунке 8.16, *а*, *б*, *в*. В каждом из трех случаев суммарная сила, действующая на диск, равна нулю как до отклонения диска от положения равновесия, так и после отклонения. Но моменты сил, созданных пружинами, в первом случае (рис. 8.16, *а*) способствуют повороту диска назад, а во втором (рис. 8.16, *б*) уводят его еще дальше от равновесия. В третьем же случае (рис. 8.16, *в*) пружины отсутствуют и, следовательно, не возникает никакого момента сил: ни возвращающего диск в положение равновесия, ни уводящего от него.

Принцип минимума потенциальной энергии

Обратим внимание на следующее: в устойчивом положении центр тяжести тела занимает наинизшее положение по сравнению со всеми возможными соседними положениями тела. Следовательно, потенциальная энергия в устойчивом положении равновесия минимальна.

График зависимости потенциальной энергии от одной из координат центра шарика в чаше представляет собой вогнутую кривую (рис. 8.17). График такой формы принято называть «потенциальной ямой». Самая нижняя точка «ямы» соответствует положению устойчивого равновесия. Для потенциальной энергии взаимодействия тела с Землей $E_p = mgh$ форма «потенциальной ямы» повторяет форму той выемки, в которой находится тело. В данном случае (шарик на дне сферы) потенциальная кривая имеет форму дуги окружности.

Наоборот, если шарик находится на вершине гладкой полусферы, то его положение неустойчиво. При небольшом смещении потенциальная энергия шарика уменьшается. Отсюда сле-

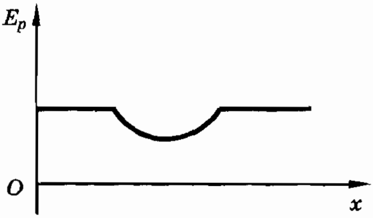


Рис. 8.17

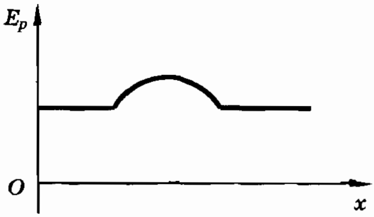


Рис. 8.18

дует, что потенциальная энергия шарика в положении неустойчивого равновесия больше, чем в близлежащих точках. Кривая потенциальной энергии, повторяющая форму поверхности, на которой расположен шарик, имеет вид дуги окружности выпуклостью вверх (рис. 8.18).

В случае безразличного равновесия при отклонении шарика не возникает никаких сил, не совершается и работа. Следовательно, неизменна и потенциальная энергия, график которой представляет собой горизонтальную прямую (рис. 8.19).

То же самое будет для примера с диском (см. рис. 8.16). Только в данном случае под потенциальной энергией E_p подразумевается энергия деформации пружин. График, выражающий зависимость потенциальной энергии от угла φ поворота диска (рис. 8.20), имеет впадину (минимум), соответствующую случаю, изображенному на рисунке 8.16, *а*. Та же кривая имеет и выпуклость (максимум), соответствующую повороту диска на 180° по отношению к предыдущему положению (см. рис. 8.16, *б*). Первое положение равновесия устойчивое, а второе неустойчивое.

На основании всех этих фактов можно сделать следующий вывод: **устойчиво то положение тела, в котором его потенциальная энергия имеет минимальное значение.**

Этот принцип минимума потенциальной энергии является одним из общих принципов устойчивости равновесия различных систем.

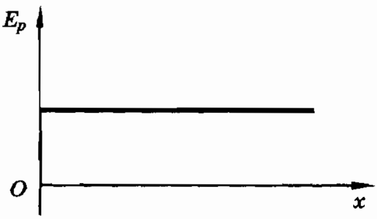


Рис. 8.19

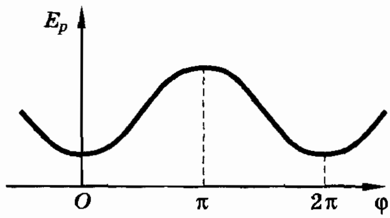


Рис. 8.20

Устойчивость равновесия тел на плоской поверхности

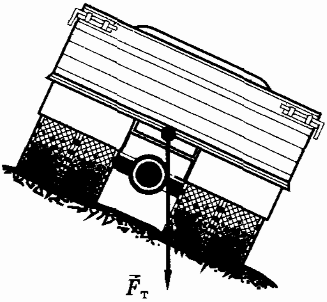


Рис. 8.21

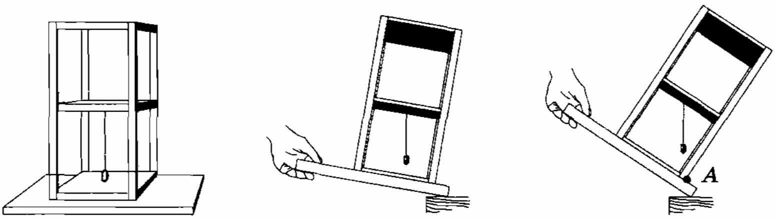
На практике очень важно знать, насколько устойчиво равновесие тел, опирающихся на горизонтальную или наклонную поверхность, когда на тела действует сила притяжения к Земле. Нужно быть уверенным, что, например, автомобиль не опрокинется на склоне холма (рис. 8.21). Устойчивым должен быть подъемный кран, применяемый на стройках, и т. д.

Прежде всего выясним, в каком случае тело, опирающееся на поверхность, не упадет. Поставим на доску небольшую металлическую этажерку, к центру тяжести которой прикреплен отвес (рис. 8.22, *а*).

Начнем постепенно поднимать край доски. Пока линия отвеса пересекает поверхность, ограниченную опорой, равновесие сохраняется (рис. 8.22, *б*). Но как только вертикаль, проходящая через центр тяжести, начнет выходить за границы поверхности опоры, этажерка опрокидывается. Дело в том, что теперь момент силы тяжести относительно оси вращения (точка A на рисунке 8.22, *в*) начнет поворачивать этажерку по часовой стрелке, нарушая равновесие. До этого момент силы тяжести прижимал этажерку к опоре.

Итак, для равновесия тела, стоящего на плоскости, необходимо, чтобы вертикаль, проходящая через центр тяжести тела, пересекала поверхность, ограниченную опорой[1].

Поэтому, в частности, нужно строго следить за тем, чтобы рельсы башенного крана лежали горизонтально. Даже небольшой их наклон создает угрозу падения крана.



а) *б*) *в*)

Рис. 8.22

[1] Этот вывод справедлив, разумеется, и для горизонтальной поверхности.

Критерием устойчивости тела, стоящего на горизонтальной поверхности, может служить угол наклона тела, при котором оно еще не падает. Нетрудно сообразить, что допустимый угол наклона тела тем больше, чем больше площадь опоры и чем ниже расположен центр тяжести тела. Призма, лежащая на широком основании, устойчивее, чем такая же призма, стоящая на узком основании. В этом можно убедиться, если отклонить призмы от горизонтальной поверхности на один и тот же угол, при котором в первом случае вертикальная линия, проходящая через центр масс, не выходит за поверхность, ограниченную опорой (рис. 8.23, *а*), а во втором — выходит (рис. 8.23, *б*). За счет большей площади опоры и низкого расположения центра тяжести первая призма возвращается в первоначальное положение, а вторая — нет.

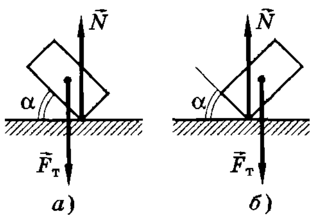


Рис. 8.23

Все эти факторы учитываются конструкторами машин и сооружений. Дома, фабричные трубы, автомобили, тракторы, станки, большинство предметов домашнего обихода, находясь в равновесии, опираются на некоторую площадь. Устойчивость улучшается с понижением центра тяжести и увеличением площади опоры, потому что увеличивается момент силы тяжести (см. рис. 8.23, *а*), возвращающий тело в первоначальное положение равновесия. Для повышения устойчивости крана его нагружают внизу бетонными плитами или используют дополнительные опоры, расстояние между колесами автомобиля или гусеницами трактора делают возможно больше и т. д.

Наклоняя тело, мы поднимаем центр тяжести и, следовательно, увеличиваем потенциальную энергию. По мере увеличения угла наклона потенциальная энергия достигает максимума и равновесие становится неустойчивым. Дальнейшее увеличение наклона вызовет уменьшение потенциальной энергии и падение тела, т. е. переход его в более устойчивое положение.

Существуют три вида равновесия: устойчивое, неустойчивое и безразличное. Устойчиво положение тела, в котором его потенциальная энергия минимальна. Устойчивость равновесия тел на плоской поверхности тем больше, чем больше площадь опоры и ниже центр тяжести.

? Используя принцип минимума потенциальной энергии, объясните, почему ванька-встанька возвращается в положение равновесия при любом наклоне игрушки (см. рис. 8.11).

§ 8.5. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

При решении задач на статику надо использовать условия равновесия (8.2.5), причем от векторного уравнения для суммы сил следует перейти к проекциям сил на координатные оси. Иногда, впрочем, удобнее решать задачу, используя геометрическое правило сложения векторов. При записи уравнения моментов вначале надо подумать, как выбрать ось, чтобы плечи сил определялись наиболее просто и были бы равны нулю для большинства сил.

Положение центра тяжести можно определить, используя формулы (8.3.8) и (8.3.9).

Применяя принцип минимума потенциальной энергии, нетрудно ответить в ряде случаев на многие вопросы, на которые дать обоснованный ответ другим способом значительно сложнее.

Ряд задач на динамику твердого тела можно решить, используя условия равновесия тел, если перейти в неинерциальную систему отсчета, относительно которой тело покоится. При этом в условия равновесия наряду с обычными силами должны входить силы инерции и моменты этих сил.

Задача 1

Шар массой m подвешен на нити (рис. 8.24, *а*) и удерживается в отклоненном положении горизонтальной силой $\vec{F}$. Найдите угол α, который образует нить с вертикалью при равновесии. Чему при этом равна сила натяжения нити?

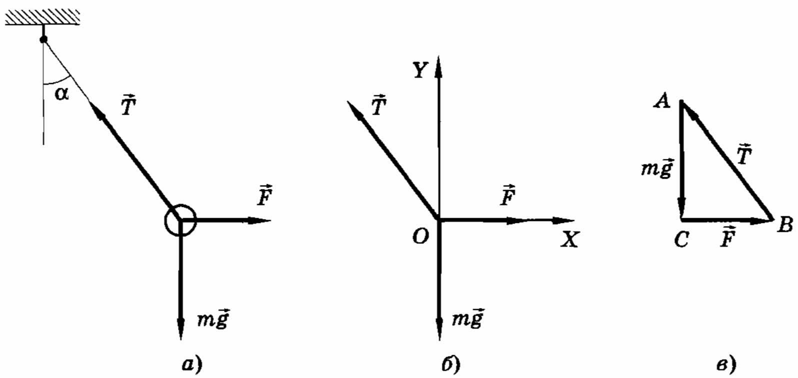


Рис. 8.24

Решение. На шар действуют три силы: сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$, сила $\vec{F}$ и сила натяжения нити $\vec{F}$, направленная вдоль нити. По первому условию равновесия

$$\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F} = 0.$$

Координатные оси направим так, как показано на рисунке 8.24, *б*. Так как сумма сил равна нулю, то и сумма проекций сил на обе оси координат равна нулю:

$$T_x + mg_x + F_x = 0,$$
$$T_y + mg_y + F_y = 0$$

или для модулей проекций:

$$F - T\sin\alpha = 0,$$
$$T\cos\alpha - mg = 0.$$

Откуда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F}{mg} \text{ и } T = \sqrt{F^2 + (mg)^2}.$$

Эту же задачу можно решить, используя правило сложения векторов. Так как сумма сил $\vec{T}$, $m\vec{g}$ и $\vec{F}$ равна нулю, то при сложении сил должен получиться треугольник. Начнем построение с известных сил. Сначала построим вектор силы $m\vec{g}$ (рис. 8.24, *в*). Из конца C этого вектора проведем вектор силы $\vec{F}$. Соединив конец вектора силы $\vec{F}$ с точкой A, получим силовой треугольник ABC, в котором сторона AB есть искомая сила $\vec{T}$. Из прямоугольного треугольника ABC находим:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F}{mg} \text{ и } T = \sqrt{F^2 + (mg)^2}.$$

Этот метод решения задачи оказывается более простым.

Задача 2

Однородная балка длиной $2l$ и массой m, расположенная горизонтально, одним концом шарнирно закреплена в точке A (рис. 8.25). Другой конец балки опирается в точке B на гладкую плоскость, наклоненную к горизонту под углом α. На балке на расстоянии a от шарнира A расположен груз массой m_1. Найдите силы реакции шарнира и плоскости. Трение в шарнире отсутствует.

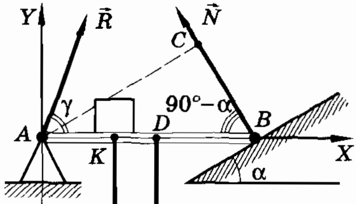


Рис. 8.25

Решение. На балку действуют четыре силы: сила реакции наклонной плоскости $\vec{N}$, сила тяжести $\vec{F} = m\vec{g}$, вес груза $\vec{P} = m_1\vec{g}$ и сила реакции $\vec{R}$ со стороны шарнира (см. рис. 8.25), которую мы изобразили на рисунке условно, так как направление ее неизвестно.

Направим оси координат X и Y так, как показано на рисунке.

Поскольку балка находится в равновесии, то сумма моментов сил относительно шарнира равна нулю:

$$M_N + M_F + M_P + M_R = 0. \qquad (8.5.1)$$

Найдем плечи сил:

$d_N = AC = 2l\sin(90° - \alpha) = 2l\cos\alpha$ — плечо силы $\vec{N}$,

$d_F = AD = l$ — плечо силы $\vec{F}$,

$d_P = AK = a$ — плечо силы $\vec{P}$.

Плечо силы $\vec{R}$ равно нулю, так как она приложена в шарнире и проходит через ось.

С учетом знаков моментов уравнение (8.5.1) запишется так:

$$N \cdot 2l\cos\alpha - mgl - m_1ga = 0.$$

Отсюда

$$N = \frac{g(ml + m_1a)}{2l\cos\alpha}.$$

Для нахождения силы реакции шарнира воспользуемся первым условием равновесия:

$$\vec{R} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{P} = 0.$$

Запишем это уравнение в проекциях на координатные оси X и Y:

$$R_x - N\sin\alpha = 0,$$
$$R_y + N\cos\alpha - mg - m_1g = 0.$$

Отсюда

$$R_x = N\sin\alpha = \frac{g(ml + m_1a)}{2l}\operatorname{tg}\alpha,$$

$$R_y = g(m_1 + m) - \frac{g(ml + m_1a)}{2l} = \frac{g}{2l}[ml + m_1(2l - a)].$$

Модуль силы реакции шарнира равен:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

С осью X вектор силы $\vec{R}$ образует угол γ, косинус которого определяется выражением:

$$\cos\gamma = \frac{R_x}{R}.$$

Задача 3

Четыре шара массами m, $2m$, $3m$, $4m$ расположены в вершинах проволочного квадрата, сторона которого равна 1 м. Найдите положение центра тяжести D системы; массами проволок можно пренебречь.

Решение. Координатные оси направим так, как показано на рисунке 8.26. Центры тяжести шаров расположены соответственно в точках O, A, B, C. Масса системы $M = m + 2m + 3m + 4m = 10m$.

Координаты центров шаров равны: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ м, $x_4 = 1$ м, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ м, $y_3 = 1$ м, $y_4 = 0$. По формулам для координат центра тяжести имеем:

$$x_D = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_4x_4}{M} = 0{,}7 \text{ м},$$

$$y_D = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + m_4y_4}{M} = 0{,}5 \text{ м}.$$

Центр тяжести системы расположен в точке D с координатами $x = 0{,}7$ м, $y = 0{,}5$ м.

Задача 4

К двум гвоздям, вбитым в стену, подвешен согнутый в середине стержень и веревка, длина которой равна длине стержня (рис. 8.27). У какого из тел центр тяжести расположен ниже?

Решение. Для ответа на этот вопрос воспользуемся принципом минимума потенциальной энергии.

Мысленно натянем веревку за ее середину, так чтобы она совместилась со стержнем. В таком положении их центры тяжести совпадают. Если отпустить веревку, то она не остается в

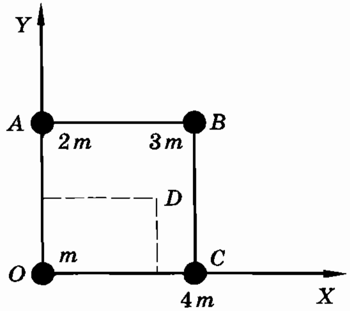


Рис. 8.26

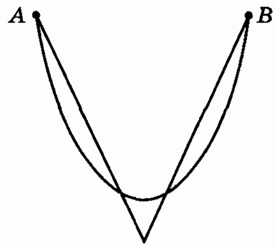


Рис. 8.27

этом положении, а провиснет, т. е. перейдет из неустойчивого положения в устойчивое. Значит, потенциальная энергия веревки уменьшается, а центр тяжести опускается вниз.

Итак, центр тяжести расположен ниже у веревки, чем у стержня.

Задача 5

К гладкой вертикальной стене дома прислонена лестница. Угол между лестницей и горизонтальной поверхностью $\alpha = 60°$. Центр тяжести лестницы находится посредине. Как направлена сила, действующая на лестницу со стороны земли?

Решение. На лестницу действуют сила тяжести $\vec{F}_т$, сила $\vec{F}$ со стороны земли и сила реакции стены $\vec{N}$. Так как стена гладкая, сила $\vec{N}$ перпендикулярна ей (рис. 8.28). Направление силы $\vec{F}$ проще всего определить, если найти положение оси, относительно которой моменты сил $\vec{F}_т$ и $\vec{N}$ равны нулю. Ось должна проходить через точку пересечения прямых OA и OB перпендикулярно плоскости чертежа. Тогда и момент силы $\vec{F}$ относительно этой оси должен быть равен нулю. Следовательно, вектор силы $\vec{F}$ должен быть направлен таким образом, чтобы его продолжение прошло через точку O. Из рисунка 8.28 видно, что $\triangle CBD = \triangle AOB$. Поэтому $OB = BD$. Обозначим длину отрезка CD буквой a, отрезка DB — b: $CD = a$, $DB = b$, $OD = 2b$. Из $\triangle OCD$ имеем:

$$\mathrm{tg}\,(30° - \beta) = \frac{a}{2b},$$

а из $\triangle CDB$:

$$\mathrm{tg}\,30° = \frac{a}{b}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{tg}\,(30° - \beta) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,30°.$$

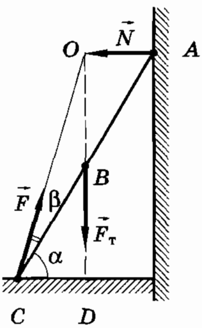


Рис. 8.28

Отсюда

$$\beta = 30° - \mathrm{arctg}\,\frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 13°54'.$$

Таким образом, сила $\vec{F}$, действующая на лестницу со стороны земли, составляет с лестницей угол $\beta \approx 14°$.

Сила, действующая на лестницу со стороны земли, направлена вдоль лестницы лишь в том случае, когда все остальные силы приложены к центру тяжести лестницы или же действуют вдоль нее.

Задача 6

На тележке, движущейся с ускорением, стоит кубик (рис. 8.29). За кубиком имеется небольшой выступ A, не позволяющий ему скользить по тележке. При каком ускорении $\vec{a}$ тележки кубик перевернется?

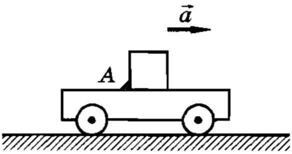


Рис. 8.29

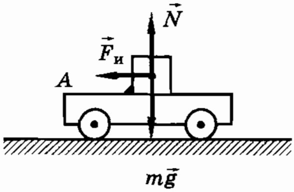


Рис. 8.30

Решение. На кубик в неинерциальной системе отсчета, связанной с тележкой, действует сила инерции $\vec{F}_и = -m\vec{a}$ (рис. 8.30), где m — масса кубика. Эта сила приложена к центру масс кубика (см. § 8.3).

Кубик перевернется, если момент силы инерции относительно оси, проходящей через выступ A, больше момента силы тяжести относительно этой оси:

$$ma\frac{b}{2} > mg\frac{b}{2},$$

где b — длина ребра кубика. Отсюда $a > g$.

Решить эту задачу в инерциальной системе отсчета значительно труднее. Для этого нужно использовать законы движения твердого тела.

Упражнение 15

1. Через три отверстия в доске пропущены нити, связанные на одном конце общим узлом (рис. 8.31). К другим концам нитей подвешены одинаковые грузы. Найдите углы между нитями при расхождении их от узла, если система находится в равновесии. Трением пренебречь.

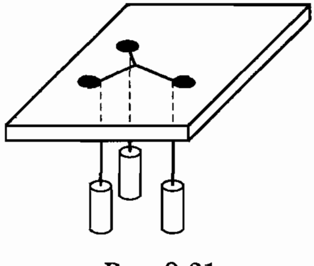


Рис. 8.31

2. Шарик радиусом r и массой m удерживается на неподвижном шаре радиусом R невесомой нитью, закрепленной в верхней точке шара. Нить расположена горизонтально, трение отсутствует (рис. 8.32). Найдите силу

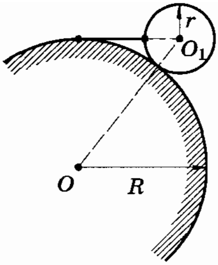


Рис. 8.32

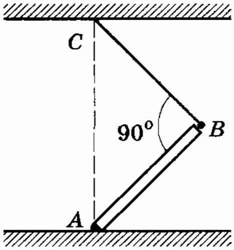


Рис. 8.33

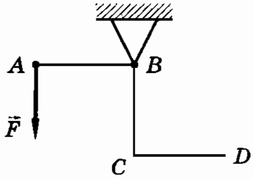


Рис. 8.34

натяжения нити и силу $\vec{N}$, с которой большой шар действует на маленький шарик.

3. На три пружины одинаковой длины положили балку так, что две пружины одинаковой жесткости подпирают концы балки, а в середине балку поддерживает пружина, жесткость которой в два раза больше. Найдите силы, действующие на балку со стороны пружин, если масса балки m.

4. При взвешивании на неравноплечих весах масса тела на одной чашке получилась равной 2 кг, а на другой 4,5 кг. Определите истинную массу тела.

5. Однородная палка массой m опирается о гладкую стену и гладкий пол. Чтобы палка не упала, ее удерживают горизонтально расположенной нитью. Один конец нити привязан к нижнему концу палки, а другой закреплен в углу между стеной и полом. Палка образует с полом угол α. Найдите силы реакции стены $\vec{N}_1$, пола $\vec{N}_2$, а также натяжение нити $\vec{T}$.

6. Каким должен быть коэффициент трения однородного стержня о пол, чтобы он был в равновесии в положении, показанном на рисунке 8.33? Стержень удерживается нитью, длина которой равна длине стержня. Угол между нитью и стержнем прямой. Точки A и C расположены на одной вертикали.

7. Тяжелый однородный стержень согнули в середине под углом 90° и подвесили на нити за один из концов. Какой угол с вертикалью образует прикрепленная к нити сторона стержня?

8. Рычаг изогнут так, что его стороны AB, BC и CD равны между собой и образуют друг с другом прямые углы (рис. 8.34). Ось рычага проходит через точку B. Перпендикулярно плечу рычага AB в точке A приложена сила $\vec{F}$. Определите минимальное значение силы, которую нужно приложить к точке D, чтобы рычаг находился в равновесии. Весом рычага пренебречь.

9. Кирпич находится в равновесии на наклонной плоскости (рис. 8.35). Какая половина кирпича, правая или левая, оказывает большее давление на плоскость?

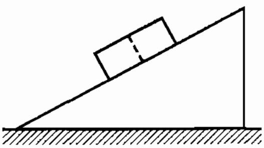


Рис. 8.35

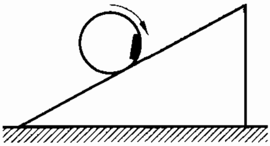


Рис. 8.36

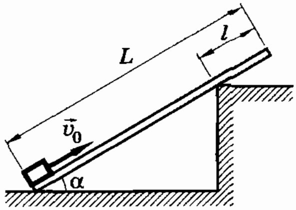


Рис. 8.37

10. Какой должна быть наименьшая скорость мотоциклиста, чтобы он мог ехать по внутренней поверхности вертикального цилиндра радиусом 6 м в горизонтальной плоскости, если известно, что коэффициент трения скольжения между шинами и поверхностью цилиндра равен 0,4? Определите угол наклона корпуса мотоциклиста к вертикали.

11. Склейте цилиндр из плотной бумаги. Прикрепите на его внутренней стороне кусок пластилина. Теперь цилиндр можно заставить катиться вверх по наклонной плоскости. Проделайте опыт и объясните его (рис. 8.36).

12. Доска длиной $L = 3$ м и массой $m_1 = 20$ кг опирается на уступ таким образом, что она составляет с горизонтом угол $\alpha = 30°$. Расстояние от свободного конца доски до уступа $l = 1$ м (рис. 8.37). Плоский диск толкнули вверх по доске со скоростью $\vec{v}_0$. При каком минимальном значении скорости v_0 нижний конец доски оторвется от пола? Масса диска $m_2 = 10$ кг. Трение между доской и диском не учитывать.

13. К гвоздю, вбитому в стену, привязана нить, намотанная на катушку. Катушка висит, касаясь стены (рис. 8.38), причем нить составляет со стеной угол $\alpha = 30°$. Радиус цилиндрической части катушки $r = 1$ см, радиус ее щечек $R = 10$ см. Найдите минимальное значение коэффициента трения между стеной и катушкой.

14. На однородный цилиндр навита веревка, конец которой закреплен в верхней точке наклонной плоскости. Цилиндр расположен на наклонной плоскости так, что веревка горизонтальна (рис. 8.39). Масса цилиндра $m = 10$ кг. Найдите модуль силы нормального давления цилиндра на плоскость.

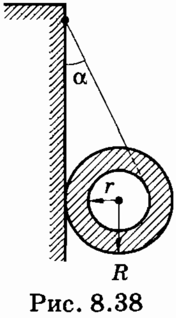


Рис. 8.38

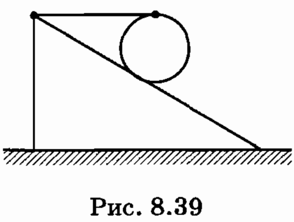


Рис. 8.39

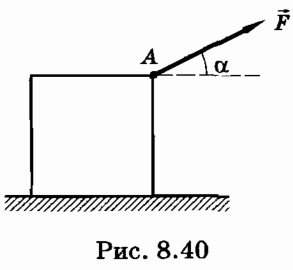


Рис. 8.40

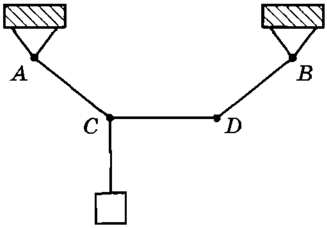


Рис. 8.41

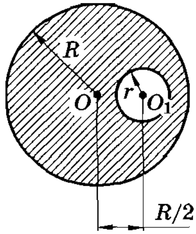


Рис. 8.42

15. Кубик массой m с длиной ребра l движется равномерно по горизонтальной плоскости. Сила $\vec{F}$ приложена к ребру кубика в точке A. Коэффициент трения между кубиком и плоскостью равен μ. Под каким углом α к горизонту (рис. 8.40) должна действовать сила $\vec{F}$, чтобы ее модуль был минимальным? Найдите минимальное значение модуля силы $\vec{F}$.

16. Три одинаковых невесомых стержня шарнирно закреплены в точках A и B, лежащих на одной горизонтали. Расстояние AB в два раза превышает длину одного стержня. К шарниру C подвешен груз массой m (рис. 8.41). Какую наименьшую по модулю силу $F_{\min}$ и в каком направлении нужно приложить к шарниру D, чтобы стержень CD был горизонтален?

17. На каком расстоянии x от дна находится центр тяжести тонкостенного цилиндрического стакана высотой $h = 12$ см и диаметром $d = 8$ см, если толщина дна в два раза больше толщины стенок?

18. Определите положение центра тяжести однородного диска радиусом R, из которого вырезано отверстие радиусом $r < \frac{R}{2}$ (рис. 8.42). Центр выреза находится на расстоянии R от центра диска.

19. Однородный металлический стержень лежит в тележке длиной l и высотой h так, что его конец выступает наружу (рис. 8.43). С каким ускорением $\vec{a}$ должна двигаться тележка, чтобы стержень не давил на край ее передней стенки?

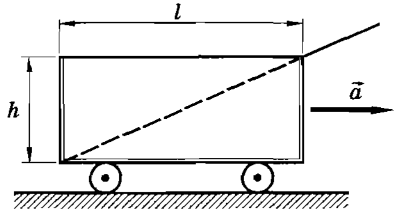


Рис. 8.43

Глава 9

МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

§ 9.1. ЧЕМ ОТЛИЧАЮТСЯ ТВЕРДЫЕ ТЕЛА ОТ ЖИДКИХ И ГАЗООБРАЗНЫХ

В большей части курса механики мы изучали движение материальных точек и их систем. Иными словами, мы изучали такие случаи движения, когда не учитывались не только деформации тел, но и их размеры. При рассмотрении динамики твердого тела и в статике мы учитывали, правда, размеры тел, но их деформациями пренебрегали, т. е. считали тела абсолютно твердыми.

Однако в огромном числе практически важных случаев пренебрегать деформациями при исследовании движения тел нельзя. Движущиеся жидкости и газы значительно деформируются. Это необходимо учитывать на практике. Приходится также учитывать деформации твердых тел (частей машин, механизмов, сооружений), так как от размеров деформаций зависят возникающие в этих телах силы.

Механика деформируемых тел — самый сложный раздел классической механики. Мы рассмотрим лишь наиболее простые вопросы этой темы. Но предварительно кратко познакомимся в самых общих чертах с механическими свойствами твердых, жидких и газообразных тел. Различие между ними с точки зрения механики состоит в неодинаковой способности к деформациям.

Твердые тела

Главное отличие твердых тел от жидкостей и газов состоит в том, что они сохраняют свою форму. Карандаш, стул, кузов автомобиля практически не изменяют своей формы, если только действующие на них силы не слишком велики. Это происходит потому, что при любой попытке их деформировать возникают силы упругости, препятствующие деформации. Если, к примеру, на твердое закрепленное на плоскости тело подействовать силой под углом к поверхности (рис. 9.1, *а*), то в нем возникают упругие силы, препятствующие изменению объема и формы. После снятия нагрузки восстановление формы сопровождается взаимным перемещением слоев тела. Это означает, что внутренние силы упругости при деформации тела имеют составляющие, направленные не только по нормали, но и по касательной к слоям тела (рис. 9.1, *б*), что и приводит к восстановлению его формы.

Напомним, что в главе 3 тела, которые восстанавливают свою форму после прекращения действия сил, вызвавших деформации, мы назвали упругими.

Тела, которые после прекращения действия внешних сил, вызвавших деформацию, не восстанавливают своей формы, называют пластичными. Соответственно и деформации тел называются упругими и пластическими или остаточными.

Одни и те же тела могут быть и упругими, и пластичными в зависимости от характера деформации. При очень больших деформациях стальная линейка не примет прежней формы. А при очень малых деформациях даже пластилин восстанавливает свою форму.

Жидкости

Если в прочную стальную оболочку заключить жидкость и сдавить ее поршнем (рис. 9.2), т. е. подвергнуть всестороннему сжатию, то деформация жидкости будет незначительной и упругой. После снятия нагрузки первоначальный объем жидкости восстанавливается (жидкость сохраняет свой объем). Эксперимент свидетельствует, что жидкости очень мало сжимаемы. Для увеличения плотности воды до 1,1 г/см^3 необходимо давление $8 \cdot 10^5$ атм. Эта практическая несжимаемость жидкостей находит применение в технике (гидравлические прессы, домкраты).

Собственной формы жидкость не имеет, она принимает форму сосуда, в котором находится. Хорошо известно, что жидкость

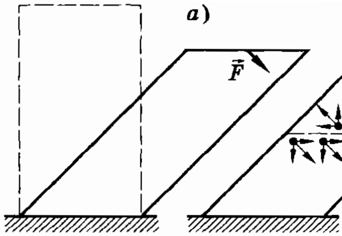


Рис. 9.1

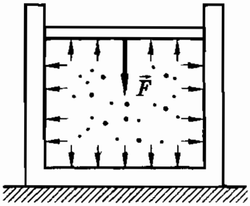


Рис. 9.2

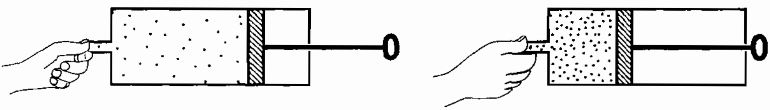
текуча — ее можно переливать из одного сосуда в другой. Объясняется это тем, что в жидкости в отличие от твердых тел смещение слоев не приводит к появлению упругих касательных напряжений. Возникающая сила при скольжении слоев жидкости пропорциональна не величине деформации, а относительной скорости слоев. Это сила трения. Поэтому перемещение тела по поверхности жидкости может быть вызвано сколь угодно малой силой. Трение покоя в жидкостях (и газах) отсутствует.

Газы

Мы знаем, как трудно изменить объем твердого тела — сжать его или растянуть. Так же трудно изменить объем жидкости. Попробуйте сжать поршнем воздух в насосе. Это удается относительно легко. При снятии нагрузки восстанавливается первоначальный объем газа, т. е. деформация газа является упругой. Газ, как и жидкость, не передает касательных упругих напряжений, поэтому он не имеет своей формы, а принимает форму сосуда, в котором находится.

При сжатии воздуха в насосе (рис. 9.3, *а*) рука чувствует, что сжимаемый газ оказывает все большее сопротивление, как будто под поршнем находится сжатая пружина. По мере сжатия газа возрастает сила упругости (рис. 9.3, *б*).

Обратим внимание еще на одну особенность газа, резко отличающую его от твердых и жидких тел. Положим на тарелку



а) *б*)

Рис. 9.3

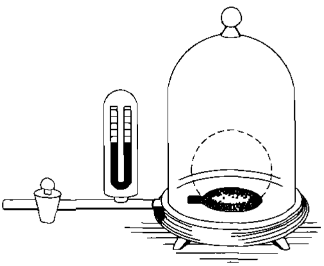


Рис. 9.4

воздушного насоса резиновый шарик с завязанным отверстием (рис. 9.4), содержащий самое незначительное количество воздуха. Будем выкачивать воздух из-под стеклянного колпака. Шарик при этом начнет раздуваться и тем сильнее, чем значительнее уменьшается давление воздуха под колпаком. В отличие от жидкостей газы не сохраняют постоянного объема и обладают способностью неограниченно расширяться. Газ всегда сжат. Как бы ни было мало количество газа, введенного в пустой сосуд, газ распределяется в нем по всему объему.

Большая сжимаемость газов и их неограниченная способность к расширению в отсутствие внешних сил являются характерными свойствами газов. Лишь сила тяготения удерживает атмосферу вблизи Земли. В межзвездном пространстве могут находиться гигантские газовые скопления — диффузные туманности, удерживаемые собственными силами гравитационного взаимодействия. Типичная газовая туманность находится, например, в созвездии Ориона.

Твердые тела сохраняют объем и форму; жидкие тела сохраняют объем; газы не сохраняют ни формы, ни объема.

§ 9.2. ВИДЫ ДЕФОРМАЦИЙ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

При проектировании сооружений и машин инженеру приходится выбирать материал и размеры для каждого элемента конструкции так, чтобы он вполне надежно, без риска разрушиться или значительно изменить свою форму сопротивлялся действию внешних сил. Этими вопросами занимается раздел механики, называемый сопротивлением материалов. В его основе лежат законы механики деформируемых тел.

Чтобы изучить поведение деформируемых тел, надо в первую очередь знать особенности их деформаций. Об этом уже кратко говорилось в главе 3.

Теперь мы рассмотрим деформации подробнее. Все деформации твердых тел можно свести к двум видам: растяжению (или сжатию) и сдвигу.

Деформации растяжения и сжатия

Если к однородному, закрепленному с одного конца стержню приложить силу $\vec{F}$ вдоль его оси в направлении от стержня, то он подвергнется **деформации растяжения** (рис. 9.5). Деформацию при этом характеризуют абсолютным удлинением $\Delta l = l - l_0$ и относительным удлинением $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$, где l_0 — начальная длина, а l — конечная длина стержня. При малых деформациях ($|\Delta l| << l_0$) большинство тел проявляет упругие свойства.

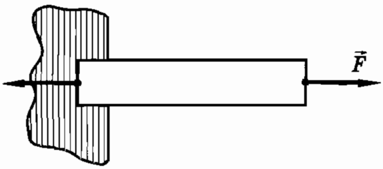


Рис. 9.5

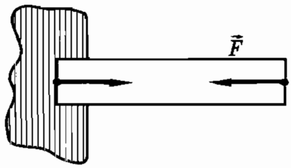


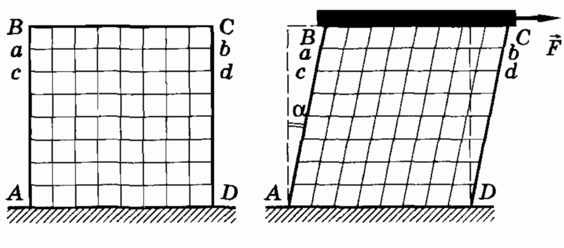
Рис. 9.6

Деформацию растяжения испытывают тросы, канаты, цепи в подъемных устройствах, стяжки между вагонами и т. д.

Если на закрепленный стержень подействовать силой вдоль его оси по направлению к стержню (рис. 9.6), то он подвергнется сжатию. В этом случае относительное удлинение (относительная деформация) ε отрицательна ($\varepsilon < 0$). Деформацию сжатия испытывают столбы, колонны, стены, фундаменты зданий и т. п.

При растяжении или сжатии изменяется площадь поперечного сечения тела. В этом легко убедиться. Растягивая резиновую трубку, на которую предварительно было надето металлическое кольцо (рис. 9.7), мы заметим, что при некотором растяжении кольцо упадет. При сжатии площадь поперечного сече-

Рис. 9.7



а) б)

Рис. 9.8

ния увеличивается. Но при небольших растяжениях и сжатиях эти эффекты незначительны, и мы их не будем учитывать.

Деформация сдвига

Возьмем резиновый брусок с начерченными на его поверхности горизонтальными и вертикальными линиями и закрепим его на столе (рис. 9.8, *а*). Сверху к бруску прикрепим рейку и приложим к ней горизонтальную силу $\vec{F}$ (рис. 9.8, *б*). Слои *ab*, *cd* и т. д. бруска сдвинутся, оставаясь параллельными, а вертикальные грани, оставаясь плоскими, наклонятся на угол α (рис. 9.8, *б*).

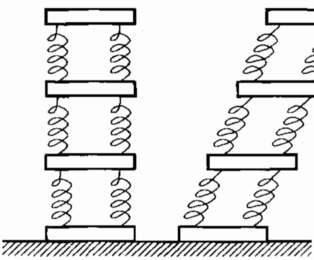
Если деформирующую силу увеличить в два раза, то и угол увеличится в два раза. Тщательные опыты подтверждают это. При сдвиге угол α (абсолютная деформация) пропорционален модулю приложенной силы ($\alpha \sim F$), если деформация является упругой.

Деформацию сдвига можно продемонстрировать на модели твердого тела, представляющего собой ряд параллельных пластин, соединенных между собой пружинами (рис. 9.9, *а*). Горизонтальная сила $\vec{F}$ сдвигает пластины друг относительно друга без изменения объема тела (рис. 9.9, *б*). У реальных твердых тел при деформации сдвига объем также не изменяется.

Деформации сдвига подвержены заклепки (рис. 9.10) и болты, скрепляющие части мостовых ферм, балки в местах опор и др. Сдвиг на большие углы может привести к разрушению тела — срезу. Срез происходит при работе ножниц, долота, зубила, зубьев пилы и т. д.

Деформация изгиба

Легко согнуть стальную или деревянную линейку руками или с помощью какой-либо другой силы. Балки и стержни, расположенные горизонтально, под действием силы тяжести или нагрузок прогибаются — подвергаются деформации изгиба. За меру деформации в случае изгиба принимается смещение середины



а) *б*)

Рис. 9.9

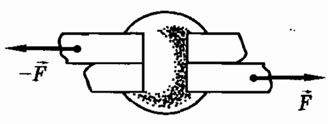


Рис. 9.10

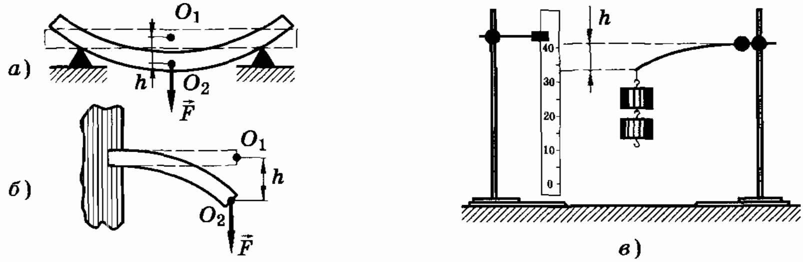


Рис. 9.11

балки (рис. 9.11, *а*) или ее конца (рис. 9.11, *б*) $O_1O_2 = h$. Это смещение называется с т р е л о й   п р о г и б а. Многочисленные опытные факты и простой эксперимент со стальной или деревянной линейкой (рис. 9.11, *в*) показывают, что при упругой деформации стрела прогиба пропорциональна нагрузке ($h \sim F$).

Деформацию изгиба можно свести к деформации неравномерного растяжения и сжатия. Действительно, на выпуклой стороне (рис. 9.12) материал подвергается растяжению, а на вогнутой — сжатию. Причем чем ближе рассматриваемый слой к среднему слою *KN*, тем растяжение и сжатие становятся меньше. Слой *KN*, не испытывающий растяжения или сжатия, называется нейтральным. Так как слои *AB* и *CD* подвержены наибольшей деформации растяжения и сжатия, то в них возникают наибольшие силы упругости (на рисунке 9.12 силы упругости показаны стрелками). От внешнего слоя к нейтральному эти силы уменьшаются. Внутренний слой не испытывает заметных деформаций и не противодействует внешним силам, а поэтому является лишним в конструкции. Его обычно удаляют, заменяя стержни трубами, а бруски — тавровыми балками (рис. 9.13).

Сама природа в процессе эволюции наделила человека и животных трубчатыми костями конечностей и сделала стебли злаков трубчатыми, сочетая экономию материала с прочностью и легкостью «конструкций».

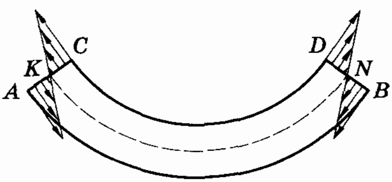


Рис. 9.12

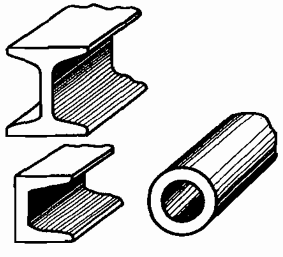


Рис. 9.13

Деформация кручения

Если на стержень, один из концов которого закреплен (рис. 9.14, *а*), подействовать парой сил, лежащей в плоскости поперечного сечения стержня, то он закручивается. Возникает, как говорят, деформация **кручения** (рис. 9.14, *б*). Явление это легко иллюстрируется на той же модели твердого тела (см. рис. 9.9).

Нанесем на поверхность круглого стержня вертикальные прямые и горизонтальные окружности. Опыт показывает, что при скручивании стержня круглого сечения (можно взять резиновую палку) происходит следующее. Все вертикальные линии поворачиваются на один и тот же угол, например $\angle B_1CB_2$ (см. рис. 9.14, *б*), а квадраты *abcd*, нанесенные на поверхности (см. рис. 9.14, *а*), перекашиваются, обращаясь в ромбы, т. е. подвергаются деформации сдвига (см. рис. 9.14, *б*).

Каждое поперечное сечение поворачивается относительно другого вокруг оси OO' стержня (рис. 9.14, *в*) на некоторый угол. Расстояние между сечениями не меняется. Таким образом, опыт показывает, что при кручении стержень можно представить как систему жестких кружков, насаженных центрами на общую ось OO'. Кружки эти (точнее, сечения) поворачиваются на различные углы в зависимости от их расстояния до закрепленного конца. Сравните, например, $\angle B_1OB_2$ и $\angle N_1O_1N_2$ (см. рис. 9.14, *в*) при одном и том же крутящем моменте пары сил. Слои поворачиваются, но на различные углы. Однако при этом соседние слои поворачиваются друг относительно друга одинаково вдоль всего стержня. Деформацию кручения можно рассматривать как неоднородный сдвиг. Неоднородность сдвига выражается в том, что

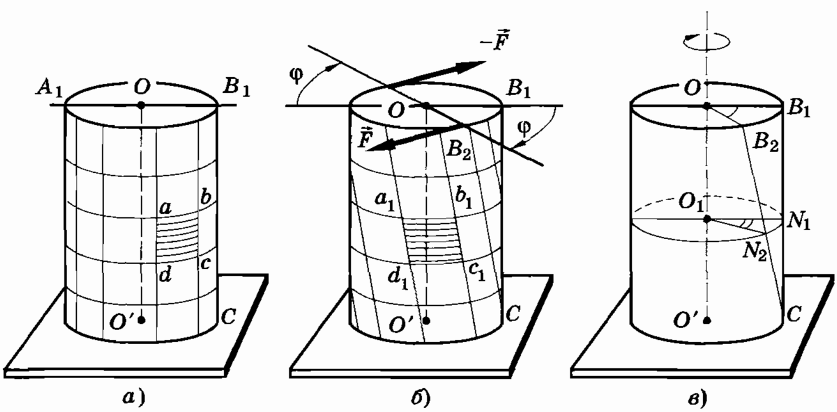


Рис. 9.14

деформация сдвига изменяется вдоль радиуса стержня. На оси деформация отсутствует, а на периферии она максимальна.

На самом удаленном от закрепленного конца торце стержня угол поворота наибольший (угол φ на рис. 9.14, *б* или угол B_1OB_2 на рис. 9.14, *в*). Его называют углом кручения. Многочисленные опыты показывают, что при упругой деформации угол кручения пропорционален вращающему моменту пары сил ($\varphi \sim M$). Кручение испытывают валы всех машин, винты, отвертки и т. п.

Основными деформациями являются деформации растяжения (сжатия) и сдвига. При деформации изгиба происходит неоднородное растяжение и сжатие, а при деформации кручения — неоднородный сдвиг.

§ 9.3. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ. ДИАГРАММА РАСТЯЖЕНИЯ

Чтобы строить надежные здания, мосты, станки, разнообразные машины, необходимо знать механические свойства используемых материалов: дерева, бетона, стали, железобетона, пластмасс и т. п. Конструктор должен заранее знать поведение материалов при значительных деформациях, условия, при которых материалы начнут разрушаться. Сведения о механических свойствах различных материалов получают в основном экспериментально.

В этом параграфе мы рассмотрим механические свойства твердых тел на примере исследования деформации растяжения, так как обычно испытание материалов проводят именно на растяжение и сжатие. Для этого нам необходимо ввести еще одно важное понятие.

Напряжение

В любом сечении деформируемого тела действуют силы упругости, препятствующие разрыву тела на части (рис. 9.15). Деформированное тело находится в напряженном состоянии, которое характеризуется особой величиной, называемой механическим напряжением или короче — напряжением.

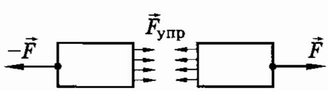


Рис. 9.15

Напряжение — величина, равная отношению модуля силы упругости к площади поперечного сечения[1] тела:

$$\sigma = \frac{F_{упр}}{S}, \qquad (9.3.1)$$

где σ — напряжение, $F_{упр}$ — модуль силы упругости и S — площадь поперечного сечения.

В СИ за единицу напряжения принимается п а с к а л ь (Па):

$$1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2.$$

Заметим, что в формуле (9.3.1) иногда удобно модуль силы упругости заменить на модуль F внешней деформирующей силы, уравновешивающей силу упругости.

Диаграмма растяжения

Для исследования деформации растяжения стержень из исследуемого материала при помощи специальных устройств (например, с помощью гидравлического пресса) подвергают растяжению и измеряют удлинение образца и возникающее в нем напряжение. По результатам опытов вычерчивают график зависимости напряжения σ от относительного удлинения ε. Этот график называют д и а г р а м м о й р а с т я ж е н и я (рис. 9.16).

Закон Гука

Многочисленные опыты показывают, что при малых деформациях напряжение σ прямо пропорционально относительному удлинению ε (участок OA диаграммы). Эта зависимость называется з а к о н о м Г у к а. Его можно записать так:

$$\sigma = E|\varepsilon|. \qquad (9.3.2)$$

Относительное удлинение в формуле (9.3.2) взято по модулю, так как закон Гука справедлив как для деформации растяжения, так и для деформации сжатия, когда $\varepsilon < 0$ (рис. 9.17).

Коэффициент пропорциональности E, входящий в закон Гука, называется м о д у л е м у п р у г о с т и или м о д у л е м Ю н г а.

---

[1] Сечение тела производится плоскостью, перпендикулярной направлению силы упругости. При этом предполагается, что деформация тела во всех участках сечения одинакова.

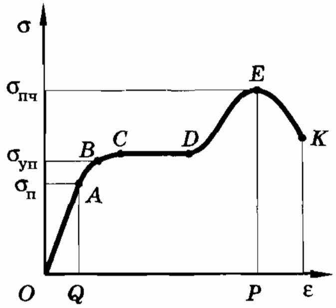


Рис. 9.16

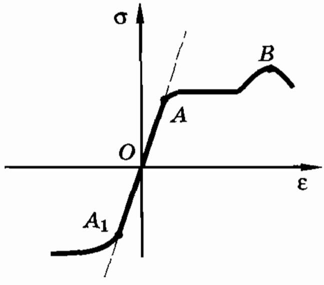


Рис. 9.17

Если относительное удлинение $\varepsilon = 1$, то $\sigma = E$. Следовательно, модуль Юнга равен напряжению, возникающему в стержне при его относительном удлинении, равном единице. Так как $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$, то при $\varepsilon = 1$ $\Delta l = l_0$. А это значит, что модуль Юнга равен напряжению, возникающему в стержне при удвоении длины образца. Практически любое тело (кроме резины) при упругой деформации не может удвоить свою длину: значительно раньше оно разорвется. Поэтому модуль Юнга определяют по формуле (9.3.2), измеряя напряжение σ и относительное удлинение ε при малых деформациях.

Из формулы (9.3.2) видно, что единица модуля Юнга в СИ такая же, как и единица напряжения, т. е. паскаль.

Чем больше модуль упругости E, тем меньше деформируется стержень при прочих равных условиях (l_0, S, F). Таким образом, *модуль Юнга характеризует сопротивляемость материала упругой деформации растяжения или сжатия.*

Закон Гука, записанный в форме (9.3.2), легко привести к виду (9.3.1).

Действительно, подставив в (9.3.2) $\sigma = \frac{F}{S}$ и $|\varepsilon| = \frac{|\Delta l|}{l_0}$, получим:

$$\frac{F}{S} = E\frac{|\Delta l|}{l_0}.$$

Откуда

$$F = \frac{SE}{l_0}|\Delta l|. \qquad (9.3.3)$$

Обозначим

$$\frac{SE}{l_0} = k, \qquad (9.3.4)$$

тогда

$$F = k|\Delta l|. \qquad (9.3.5)$$

Таким образом, согласно (9.3.4) жесткость k стержня прямо пропорциональна произведению модуля Юнга на площадь поперечного сечения стержня и обратно пропорциональна его длине.

Пределы пропорциональности и упругости

Эксперимент показывает, что малые деформации полностью исчезают после снятия нагрузки (упругая деформация). При малых деформациях выполняется закон Гука. Максимальное напряжение, при котором еще выполняется закон Гука, называется *пределом пропорциональности*.

Если продолжать увеличивать нагрузку при растяжении и превзойти предел пропорциональности, то деформация становится нелинейной (линия $ABCDEK$, рис. 9.16). Тем не менее при небольших нелинейных деформациях после снятия нагрузки форма и размеры тела практически восстанавливаются (участок AB графика). Максимальное напряжение, при котором еще не возникают заметные остаточные деформации, называется *пределом упругости* $\sigma_{\text{уп}}$. Он соответствует точке B графика. Предел упругости превышает предел пропорциональности не более чем на 0,33%. В большинстве случаев их можно считать равными.

Предел и запас прочности

Если внешняя нагрузка такова, что в теле возникают напряжения, превышающие предел упругости, то характер деформации меняется (участок $BCDEK$ графика, рис. 9.16). После снятия нагрузки образец не принимает прежние размеры, а остается деформированным, хотя и с меньшим удлинением, чем при нагрузке (пластическая деформация).

За пределом упругости при некотором значении напряжения, соответствующем точке C графика (см. рис. 9.16), удлинение возрастает практически без увеличения нагрузки (участок CD диаграммы почти горизонтален). Это явление называется *текучестью материала*.

При дальнейшем увеличении нагрузки напряжение повышается (от точки D), после чего в наименее прочной части образца появляется сужение («шейка»). Из-за уменьшения площади сечения (точка E) для дальнейшего удлинения нужно меньшее напряжение, но в конце концов наступает разрушение образца (точка K). Наибольшее напряжение, которое выдерживает образец без разрушения, называется пределом прочности. Обозначим его $\sigma_{пч}$ (оно соответствует точке E диаграммы). Его значение сильно зависит от природы материала и его обработки.

Чтобы свести к минимуму возможность разрушения сооружения, инженер должен при расчетах допускать в его элементах такие напряжения, которые будут составлять лишь часть предела прочности материала. Их называют допустимыми напряжениями. Число, показывающее, во сколько раз предел прочности больше допустимого напряжения, называют коэффициентом запаса прочности.

Обозначив запас прочности через n, получим:

$$n = \frac{\sigma_{пч}}{\sigma_{доп}}. \tag{9.3.6}$$

Запас прочности выбирается в зависимости от многих причин: качества материала, характера нагрузки (статическая или изменяющаяся со временем), степени опасности, возникающей при разрушении, и т. д. На практике запас прочности колеблется от 1,7 до 10. Выбрав правильно запас прочности, инженер может определить допустимое в конструкции напряжение.

Закон Гука для деформации сдвига

При деформации сдвига сила направлена по касательной к плоскости верхней грани тела (см. рис. 9.8). Эта сила уравновешивается возникающей силой упругости: $\vec{F} = -\vec{F}_{упр}$. Отношение модуля силы упругости, возникающей при деформации сдвига, к площади верхней грани называется касательным напряжением и обозначается буквой τ:

$$\tau = \frac{F_{упр}}{S}. \tag{9.3.7}$$

Опыт показывает, что касательное напряжение τ при малых деформациях прямо пропорционально углу сдвига α. Это и есть закон Гука для деформации сдвига. Он записывается так:

$$\tau = \gamma\alpha. \tag{9.3.8}$$

Коэффициент γ называется **модулем сдвига**. Он численно равен касательному напряжению при угле сдвига в 1 рад. Очевидно, что для абсолютного большинства реальных материалов такое напряжение нельзя приложить к реальным телам, не разрушая их.

В СИ единицей модуля сдвига является 1 Па/рад.

Наиболее полную информацию об упругих свойствах материалов дает диаграмма растяжения, получаемая экспериментально. При малых деформациях напряжение в твердом теле прямо пропорционально относительной деформации (закон Гука).

§ 9.4. ПЛАСТИЧНОСТЬ И ХРУПКОСТЬ

Тело из любого материала при малых деформациях ведет себя как упругое. В то же время почти все тела в той или иной мере могут испытывать пластические деформации. Существуют хрупкие тела.

Механические свойства материалов разнообразны. Такие материалы, как резина или сталь, обнаруживают упругие свойства до сравнительно больших напряжений и деформаций. Для стали, например, закон Гука выполняется вплоть до $\varepsilon = 1\%$, а для резины — до значительно больших ε, порядка десятков процентов. Поэтому такие материалы называют **упругими**.

Пластичность

У мокрой глины, пластилина или свинца область упругих деформаций мала. Материалы, у которых незначительные нагрузки вызывают пластические деформации, называют **пластичными**.

Деление материалов на упругие и пластичные в значительной мере условно. В зависимости от возникающих напряжений один и тот же материал будет вести себя или как упругий, или как пластичный. Так, при очень больших напряжениях сталь обнаруживает пластичные свойства. Это широко используют при штамповке стальных изделий с помощью прессов, создающих огромную нагрузку.

Холодная сталь или железо с трудом поддаются ковке молотом. Но после сильного нагрева им легко придать посредством ковки любую форму. Пластичный при комнатной температуре свинец приобретает ярко выраженные упругие свойства, если его охладить до температуры ниже −100 °C.

Хрупкость

Большое значение на практике имеет свойство твердых тел, называемое хрупкостью. Тело называют хрупким, если оно разрушается при небольших деформациях. Изделия из стекла и фарфора хрупкие: они разбиваются на куски при падении на пол даже с небольшой высоты. Чугун, мрамор, янтарь также обладают повышенной хрупкостью. Наоборот, сталь, медь, свинец не являются хрупкими.

Отличительные особенности хрупких тел легче всего уяснить с помощью зависимости σ от ε при растяжении. На рисунке 9.18, *а, б* изображены диаграммы растяжений чугуна и стали. На них видно, что при растяжении чугуна всего лишь на 0,1% в нем возникает напряжение около 80 МПа, тогда как в стали оно при такой же деформации равно лишь 20 МПа.

Чугун разрушается сразу при удлинении на 0,45%, почти не испытывая предварительно пластических деформаций. Предел прочности его равен $1{,}2 \cdot 10^8$ Па. У стали же при $\varepsilon = 0{,}45\%$ деформация все еще остается упругой и разрушение происходит при $\varepsilon \approx 15\%$. Предел прочности стали равен 700 МПа.

У всех хрупких материалов напряжение очень быстро растет с удлинением, и они разрушаются при весьма малых деформациях. Пластичные свойства у хрупких материалов практически не проявляются.

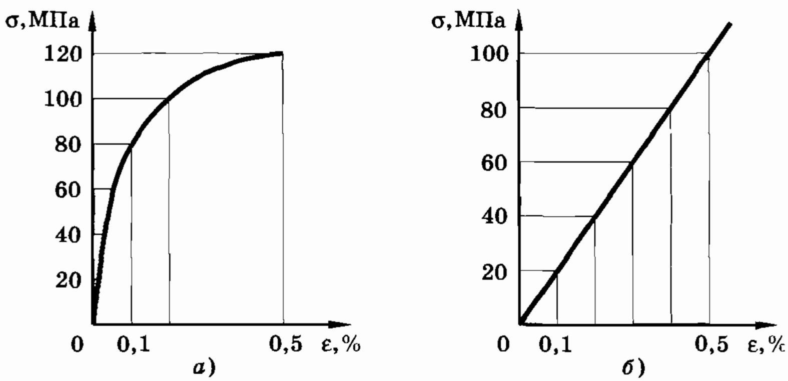


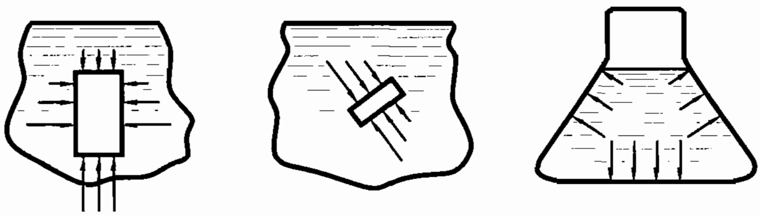
Рис. 9.18

§ 9.5. ДАВЛЕНИЕ В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ. СООБЩАЮЩИЕСЯ СОСУДЫ

Изучение механических свойств жидкости начнем с гидростатики — теории поведения неподвижной жидкости. Как и все материальные тела, жидкости подчиняются законам механики Ньютона. Закономерности, наблюдаемые в жидкостях, могут быть объяснены на основе последовательного применения этих законов.

Силы, с которыми действуют друг на друга отдельные участки сжатой жидкости или газа, подобны силам упругости в твердых телах. Если мысленно выделить в сжатой жидкости какой-либо объем, то со стороны остальной жидкости на него будут действовать силы упругости, зависящие от степени сжатия жидкости. В свою очередь выделенный объем действует на остальную жидкость (и на стенки сосуда).

Однако силы упругости в жидкости или газе возникают только при деформации сжатия, но не при сдвиге слоев друг относительно друга. Поэтому сила, действующая на поверхность любого элемента жидкости (или газа) со стороны остальной жидкости, а также на поверхность твердого тела, в статическом случае всегда нормальна (перпендикулярна) к поверхности (рис. 9.19, а, *б*, *в*). Направленных по касательной к поверхности сил упругости нет.



а) *б*) *в*)

Рис. 9.19

Давление

Сила упругости внутри жидкости почти всегда сжимает выделенный объем[1]. Вследствие этого упругие напряжения в жидкостях и газах называют давлением. Если сила давления $\vec{F}$ равномер-

---

[1] При соблюдении некоторых специальных условий жидкость может быть и растянутой.

но распределена по поверхности площадью S, то давление p равно отношению модуля силы давления к площади поверхности:

$$p = \frac{F}{S}. \tag{9.5.1}$$

В СИ единицей давления является п а с к а л ь (Па).

Гидростатическое давление

Выделим мысленно вертикальный столб жидкости высотой h, основанием которого служит площадка площадью S (рис. 9.20). Объем выделенного столба жидкости равен Sh. Сила, с которой столб жидкости действует на площадку (основание столба), представляет собой вес столба жидкости: $F = P$. Так как жидкость неподвижна, то вес столба жидкости равен действующей на него силе тяжести, следовательно:

$$P = mg = \rho Shg, \tag{9.5.2}$$

где ρ — плотность жидкости.

Давление, производимое столбом жидкости на его основание, равно:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{\rho Shg}{S} = \rho gh.$$

Итак,

$$p = \rho gh. \tag{9.5.3}$$

Давление, которое создает жидкость, находящаяся в равновесии при действии силы тяжести, называют г и д р о с т а т и ч е с к и м. Гидростатическое давление определяется формулой (9.5.3).

Давление внутри жидкости на любой глубине h слагается из атмосферного давления p_0 (или внешнего давления) на жидкость и гидростатического давления ρgh:

$$\boxed{p = p_0 + \rho gh.} \tag{9.5.4}$$

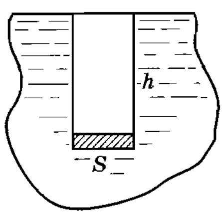
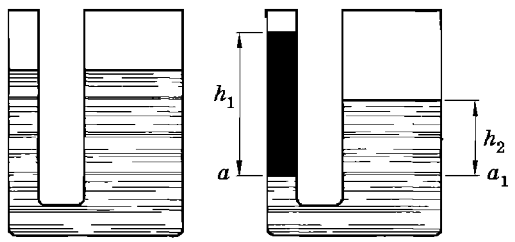


Рис. 9.20



а) б)

Рис. 9.21

Из-за того что по мере погружения в жидкость давление возрастает, приходится использовать особо прочные конструкции при постройке подводных лодок и батискафов. Увеличение давления с глубиной ощущают работающие под водой люди: водолазы, спортсмены, увлекающиеся подводным плаванием.

Сообщающиеся сосуды

На рисунке 9.21, *а* изображены соединенные между собой сосуды, называемые сообщающимися. Лейка, чайник, кофейник (рис. 9.22) — примеры сообщающихся сосудов.

Рис. 9.22

Однородная жидкость в сообщающихся сосудах устанавливается на одном уровне. Это легко объяснить, пользуясь формулой (9.5.3). В покоящейся однородной жидкости давление на любом уровне в обоих сообщающихся сосудах одинаково. Поэтому одинаковы и высоты столбов однородной жидкости над этими уровнями.

Если же в сообщающихся сосудах находятся разнородные жидкости, то при равновесии уровни этих жидкостей не будут одинаковыми (рис. 9.21, *б*). Давление жидкостей на уровне aa_1 при равновесии одинаково:

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2,$$

где ρ_1 и ρ_2 — плотности жидкостей в сообщающихся сосудах. Отсюда

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \qquad (9.5.5)$$

В сообщающихся сосудах высоты столбов жидкости над уровнем раздела жидкостей обратно пропорциональны плотности этих жидкостей.

Давление в жидкости прямо пропорционально высоте столба жидкости.

§ 9.6. ЗАКОН ПАСКАЛЯ. ГИДРОСТАТИЧЕСКИЙ ПАРАДОКС

В этом параграфе мы рассмотрим закон природы, выполняющийся только для жидкостей и газов и не применимый к твердым телам.

Мысленно представим себе, что внутри жидкости в данной ее точке расположена маленькая площадка. Жидкость производит давление на эту площадку. Существенно, что давление жидкости на эту маленькую площадку не зависит от ориентации площадки. Чтобы доказать справедливость данного утверждения, воспользуемся так называемым принципом отвердевания. Согласно этому принципу любой объем жидкости или газа в статическом случае, когда элементы жидкости друг относительно друга не смещаются, можно рассматривать как твердое тело и применить к этому объему условия равновесия твердого тела.

Выделим в жидкости небольшой объем в виде длинной треугольной призмы (рис. 9.23, *а*), одна из граней которой (грань *OBCD*) расположена горизонтально. Площади оснований призмы будем считать малыми по сравнению с площадью боковых граней. Малым будет объем призмы, следовательно, и сила тяжести, действующая на эту призму. Этой силой можно пренебречь по сравнению с силами давления, действующими на грани призмы[1].

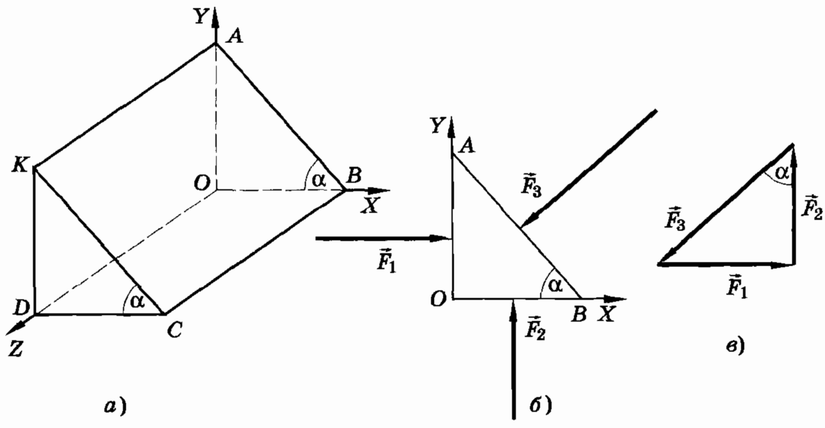


Рис. 9.23

[1] Площадь поверхности пропорциональна квадрату линейных размеров тела, а объем — кубу. Поэтому у призмы малых размеров силой тяжести, пропорциональной объему, всегда можно пренебречь по сравнению с силой давления, пропорциональной площади поверхности.

На рисунке 9.23, *б* изображено поперечное сечение призмы. На боковые грани призмы действуют силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$. Силы давления на основания призмы не учитываем, так как они уравновешены. Тогда согласно условию равновесия

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0.$$

Векторы этих сил образуют треугольник, подобный треугольнику AOB, так как углы в этих двух треугольниках соответственно равны (рис. 9.23, *в*). Из подобия треугольников следует, что

$$\frac{F_1}{OA} = \frac{F_2}{OB} = \frac{F_3}{AB}.$$

Умножим знаменатели этих дробей соответственно на OD, BC и KA ($OD = BC = KA$):

$$\frac{F_1}{OA \cdot OD} = \frac{F_2}{OB \cdot BC} = \frac{F_3}{AB \cdot KA}.$$

Из рисунка 9.23, *а* видно, что знаменатель каждой дроби равен площади соответствующей боковой грани призмы. Обозначив площади этих граней призмы через S_1, S_2, S_3, получим:

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} = \frac{F_3}{S_3}$$

или

$$p_1 = p_2 = p_3. \qquad (9.6.1)$$

Итак, **давление в неподвижной жидкости (или газе) не зависит от ориентации площадки внутри жидкости.**

Согласно же формуле (9.5.3) давление одинаково во всех точках, лежащих на данном уровне. Это давление на нижележащие слои жидкости создается столбом жидкости высотой h. Поэтому можно заключить, что давление верхних слоев жидкости на слои жидкости, расположенные под ними, передается нижележащими слоями одинаково по всем направлениям.

Но давление на жидкость можно произвести внешними силами, например с помощью поршня. Учитывая это, мы приходим к закону Паскаля: **давление, производимое внешними силами на покоящуюся жидкость, передается жидкостью во все стороны одинаково.**

В этой формулировке закон Паскаля остается верным и для общего случая, т. е. для случая, когда мы учитываем силу тяжести. Если сила тяжести создает внутри покоящейся жидкости давление, зависящее от глубины погружения, то приложен-ные внешние (поверхностные) силы увеличивают давление в каждой точке жидкости на одну и ту же величину.

Закон Паскаля можно подтвердить экспериментально. Если, например, наполнить водой металлический шар, в котором проделано несколько отверстий, и затем сжать воду поршнем, то одинаковые струи воды брызнут из всех отверстий (рис. 9.24, *а*). Закон Паскаля справедлив также и для газов (рис. 9.24, *б*).

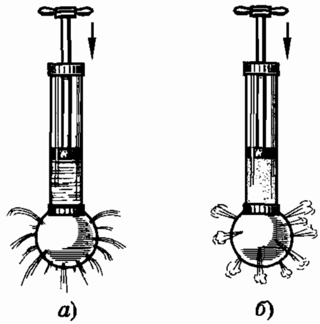


Рис. 9.24

Гидростатический парадокс

Возьмем три сосуда различной формы (рис. 9.25). В сосуд A налита вода весом 3 Н, в сосуд B — весом 2 Н, а в сосуд C — весом 1 Н. Уровень воды во всех трех сосудах оказался на высоте 0,1 м. Площадь дна у каждого сосуда равна 20 см^2 = 0,002 м^2. Применяя формулу $p = \rho g h$, мы найдем, что давление на дно каждого сосуда равно 1000 Па. Зная давление, мы по формуле $F = pS$ найдем, что сила давления на дно сосуда во всех трех случаях равна 2 Н. Не может быть, скажете вы. Как может вода весом 1 Н в третьем сосуде создавать силу давления на дно в 2 Н? Это положение, которое кажется противоречащим здравому смыслу, известно под названием «гидростатического парадокса», или «парадокса Паскаля».

Пытаясь разрешить загадку гидростатического парадокса, Паскаль ставил сосуды, подобные показанным на рисунке 9.25, на специальные весы, позволяющие измерить силу давления на дно каждого сосуда (рис. 9.26, *а, б, в*). Дно сосуда, стоящее на весах, не было жестко связано с сосудом, а сам сосуд закреплялся неподвижно на особой подставке. Показания весов подтвердили расчеты. Таким образом, вопреки здравому смыслу сила давления на дно сосуда не зависит от формы сосуда, а зависит лишь от высоты столба жидкости, ее плотности и площади дна.

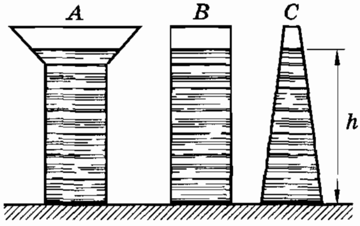


Рис. 9.25

Этот опыт приводит к мысли, что при надлежащей форме сосуда можно при помощи очень небольшого количества жидкости со-

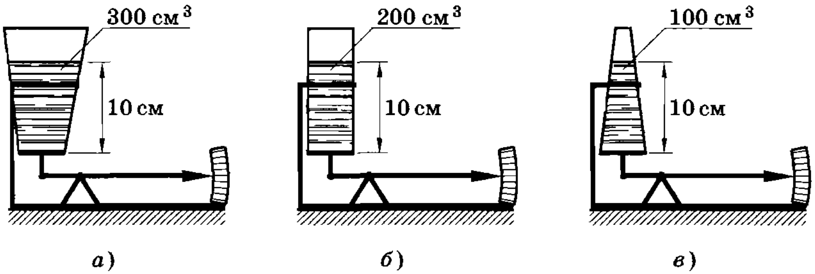


Рис. 9.26

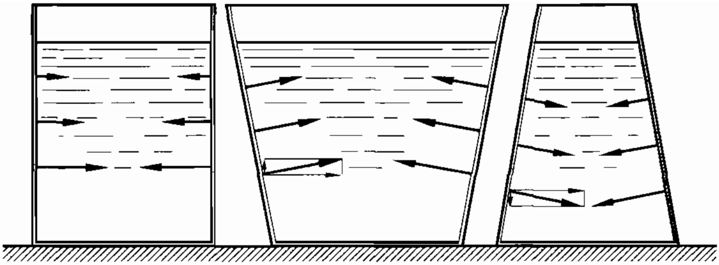
здать очень большие силы давления на дно. Паскаль прикрепил к плотно закупоренной бочке трубку площадью сечения 1 см² и налил в нее воды до высоты 4 м (вес воды в трубке $P = mg = 4$ Н). Возникшие силы давления разорвали бочку (рис. 9.27). Приняв площадь дна бочки равной 7500 см², получим силу давления на дно в 30 000 Н, и эта огромная сила вызвана всего одной кружкой воды (400 см³), налитой в трубку.

Рис. 9.27

Как же объяснить парадокс Паскаля?

Сила тяжести создает внутри покоящейся жидкости давление, которое, согласно закону Паскаля, передается и на дно, и на стенки сосуда. Если жидкость давит на дно и стенки сосуда, то и стенки сосуда производят давление на жидкость (третий закон Ньютона).

Если стенки сосуда вертикальные (рис. 9.28, *а*), то силы давления стенок сосуда на жидкость направлены горизонтально. Следовательно, вертикальной составляющей эти силы не имеют. Поэтому сила давления жидкости на дно сосуда равна в этом случае весу жидкости в сосуде. Если же сосуд кверху расширяется (рис. 9.28, *б*) или сужается (рис. 9.28, *в*), то сила давления стенок сосуда на жидкость имеет вертикальную составляющую, направленную в первом случае вверх, а во втором — вниз. Поэтому в расширяющемся кверху сосуде сила давления на дно равна разности веса жидкости и вертикальной составляющей силы давления стенок. Следовательно, сила давления на



а) б) в)

Рис. 9.28

дно в этом случае меньше веса жидкости. В сужающемся кверху сосуде, наоборот, сила давления на дно равна сумме веса жидкости и вертикальной составляющей силы давления стенок на жидкость. Теперь сила давления на дно больше веса жидкости.

Разумеется, если поставить на чашки весов различные сосуды без отделяющегося дна и не закрепленные на подставках, то показания весов будут различными (2 Н, 3 Н и 1 Н, если массой сосудов можно пренебречь). В этом случае к силе давления жидкости на дно в расширяющемся сосуде будет добавляться вертикальная составляющая сил давления жидкости на боковую поверхность. В сужающемся сосуде соответствующая составляющая сил давления будет вычитаться из силы давления на дно.

Гидравлический пресс

Закон Паскаля позволяет объяснить действие распространенного в технике устройства — гидравлического пресса.

Гидравлический пресс состоит из двух цилиндров разного диаметра, снабженных поршнями и соединенных трубкой (рис. 9.29). Пространство под поршнями и трубка заполняются жидкостью (минеральным маслом). Обозначим площадь первого поршня через S_1, а второго — через S_2. Приложим ко второму поршню силу $\vec{F}_2$. Найдем, какую силу $\vec{F}_1$ необходимо приложить к первому поршню, чтобы сохранить равновесие.

Согласно закону Паскаля давление во всех точках жидкости должно быть одним и тем же (действием силы тяжести на жидкость пренебрегаем). Но давление под первым поршнем равно $\frac{F_1}{S_1}$, а под вторым $\frac{F_2}{S_2}$.

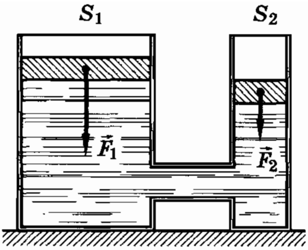


Рис. 9.29

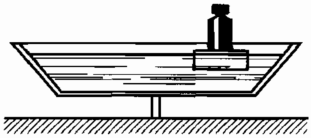


Рис. 9.30

Следовательно,

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}.$$

Отсюда

$$F_1 = F_2\frac{S_1}{S_2}. \qquad (9.6.2)$$

Модуль силы $\vec{F}_1$ во столько же раз больше модуля силы $\vec{F}_2$, во сколько раз площадь первого поршня больше площади второго. Таким образом, при помощи гидравлического пресса можно посредством малой силы, приложенной к поршню небольшого сечения, получить огромные силы, действующие на поршень большого сечения. Принцип гидравлического пресса используется в гидравлических домкратах для подъема тяжелых грузов.

Благодаря закону Паскаля возможны парадоксальные ситуации, когда кружка воды, добавленная в бочку, приводит к ее разрыву. Тот же закон Паскаля лежит в основе устройства гидравлических прессов.

? Сосуд с водой установлен на ребре доски (рис. 9.30). Нарушится ли равновесие, если на поверхность воды положить дощечку и на нее поставить гирьку так, что дощечка с гирькой будут плавать на поверхности воды не в середине сосуда?

§ 9.7. ЗАКОН АРХИМЕДА

Закон Архимеда — это один из первых количественных физических законов, открытых человеком.

Действие жидкости и газа на погруженное в них тело

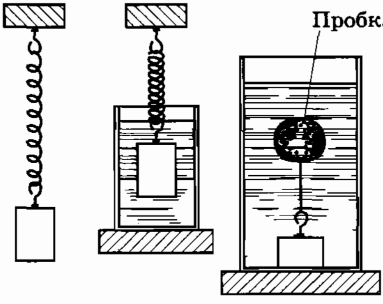
На рисунке 9.31, *а* изображено тело, подвешенное на пружине. Сила тяжести уравновешивается силой упругости пружины. При опускании тела в воду пружина сокращается (рис. 9.31, *б*). Теперь сила тяжести уравновешивается меньшей силой упругости (деформация пружины уменьшилась, следовательно, согласно закону Гука уменьшилась и сила упругости). Данный опыт свидетельствует о том, что вода производит на погруженное в нее тело выталкивающее действие. Этот же вывод подтверждается опытом, изображенным на рисунке 9.31, *в*.

Сила, с которой жидкость (или газ) выталкивает погруженное в нее тело, называется выталкивающей или архимедовой силой. Эта сила возникает из-за того, что давление жидкости увеличивается с глубиной: сила давления, действующая на тело сверху вниз, меньше силы давления, направленной снизу вверх.

Закон Архимеда

Рассмотрим для простоты тело, имеющее форму прямоугольного параллелепипеда. Это тело погружено в жидкость так, что его основания расположены горизонтально (рис. 9.32). Силы, действующие на боковые грани тела, уравновешиваются. Они лишь сжимают тело. Силы же, действующие на основания параллелепипеда, не одинаковы. Модуль силы, действующей на верхнее основание, равен:

$$F_1 = p_1S = \rho g h_1 S,$$



а) *б*) *в*)

Рис. 9.31

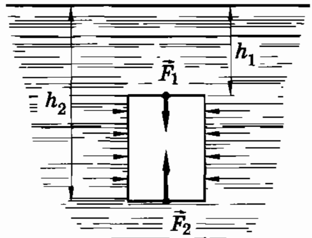


Рис. 9.32

где h_1 — высота жидкости над верхним основанием, ρ — плотность жидкости, S — площадь основания[1].

Модуль силы давления жидкости, действующей на нижнее основание, равен:

$$F_2 = \rho g h_2 S,$$

где h_2 — глубина, на которой находится нижнее основание. Но $h_2 > h_1$, поэтому и $F_2 > F_1$. Следовательно, модуль равнодействующей силы

$$F_А = F_2 - F_1 = \rho g(h_2 - h_1)S.$$

Обозначим высоту параллелепипеда буквой h ($h = h_2 - h_1$). Тогда

$$F_А = \rho g V, \qquad (9.7.1)$$

где $V = Sh$ — объем тела.

Если тело погружено не полностью, а частично, то под V в формуле (9.7.1) следует понимать объем погруженной части тела. Правая часть выражения (9.7.1) равна весу жидкости, вытесняемой погруженным телом. Поэтому мы можем сказать: **на тело, погруженное в жидкость (или газ), действует выталкивающая сила, равная весу жидкости (газа) в объеме погруженной части тела.** Это и есть *закон Архимеда.*

Используя принцип отвердевания, можно показать, что этот вывод верен для тела произвольной формы. Мысленно удалим погруженное в жидкость тело (рис. 9.33) и заполним объем, который оно занимало, жидкостью. При этом вся жидкость в сосуде останется в равновесии и можно считать отвердевшей ту часть жидкости, которая заняла место удаленного тела. На эту часть жидкости действует сила тяжести, *приложенная к ее центру тяжести.* Кроме того, на нее действует выталкивающая сила, представляющая собой результирующую сил давления, действующих со стороны окружающей жидкости; эта сила долж-

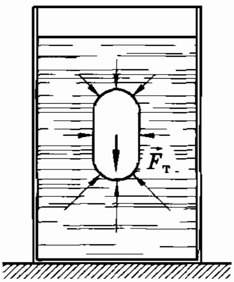


Рис. 9.33

[1] Мы для простоты считаем, что внешнее (атмосферное) давление на жидкость отсутствует. Учет этого давления не оказывает влияния на значение выталкивающей силы.

на быть направлена вверх и равна по модулю силе тяжести, приложенной к выделенному «отвердевшему» объему:

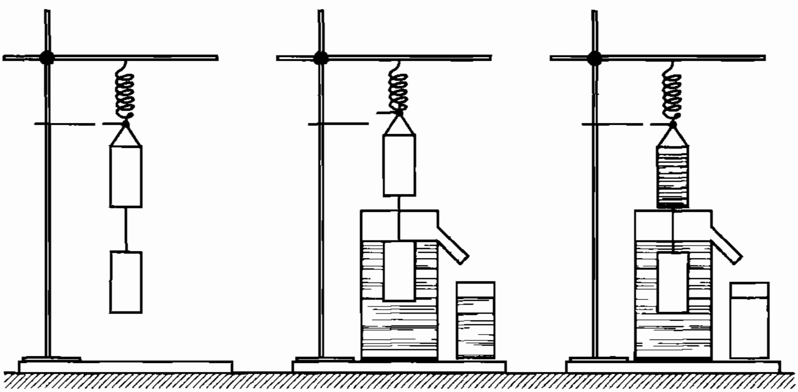
$$\vec{F}_A + m\vec{g} = 0, \vec{F}_A = -m\vec{g}.$$

Для того чтобы была равна нулю и сумма моментов внешних сил относительно оси, проходящей через центр тяжести «отвердевшего» объема, результирующая сил давления должна проходить через центр тяжести.

Теперь заменим «отвердевший» объем жидкости снова телом. Силы давления, действующие на тело, будут такими же, как и силы, действующие на объем жидкости. Их равнодействующая и есть выталкивающая сила. Итак, на погруженное в жидкость тело действует выталкивающая сила, модуль которой равен весу жидкости в объеме погруженной части тела. Выталкивающая сила направлена вертикально вверх и проходит через центр тяжести выделенного объема жидкости.

На рисунке 9.34 изображена схема опыта, подтверждающего закон Архимеда. На пружине подвешены стакан и цилиндр (рис. 9.34, *а*). При погружении цилиндра в сосуд с трубкой для слива вытесняемой воды (рис. 9.34, *б*) он вытесняет воду, а пружина сжимается. Вес вытесненной воды равен архимедовой силе. Проверяется это так: выливают вытесненную воду в подвешенный стакан и замечают, что указатель пружины принимает первоначальное положение (рис. 9.34, *в*).

Благодаря действию выталкивающей силы возможно плавание тел: лодок, кораблей и др. Для этого необходимо, чтобы вес



а) *б*) *в*)

Рис. 9.34

воды, вытесненной подводной частью корабля, был равен силе тяжести, действующей на корабль. Плотность стального корпуса корабля более чем в пять раз больше плотности воды. Но средняя плотность, равная массе всего корабля, деленной на его объем, меньше плотности воды.

Архимедова сила действует также на тела в воздухе. Однако плотность воздуха мала ($\approx 1{,}3$ кг/м^3) и действием выталкивающей силы в большинстве случаев можно пренебречь. Например, для латунных гирь (плотность латуни равна $8{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3), которые часто применяются для взвешивания, выталкивающая сила составляет лишь $1{,}5 \cdot 10^{-2}$% от силы тяжести.

Выталкивающая сила действует на тела в жидкостях и газах, потому что они сжаты силой притяжения к Земле. В состоянии невесомости архимедова сила не действует.

?

1. Два сплошных тела различных масс уравновешены на рычаге. Тела опускают в воду. Нарушится ли равновесие рычага и почему?
2. На дне сосуда с жидкостью лежит тело, плотность которого чуть больше плотности жидкости. Можно ли заставить тело всплыть, повышая давление на жидкость?
3. На рычаге уравновесили два одинаковых тела, затем одно тело погрузили в воду, а другое — в сосуд с керосином. Какое из тел перетянет при полном их погружении?
4. Деревянный брусок плавает в керосине. Такой же брусок плавает в воде. Одинаковы ли выталкивающие силы, действующие на бруски в обоих случаях? Одинаковы ли объемы погруженных частей тела?

§ 9.8. ГИДРОДИНАМИКА. ЛАМИНАРНОЕ И ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ

Мы познакомились с некоторыми механическими свойствами неподвижных жидкостей. Явления в движущихся жидкостях намного сложнее. Они изучаются в гидродинамике.
Раздел механики, изучающий движения жидкостей и газов, а также взаимодействие движущихся жидкостей и газов с твердыми телами, называется гидро- и аэродинамикой.

Гидродинамика

Движение воды в реке или по трубам водопроводов, движение огромных масс атмосферного воздуха, крови в кровеносных сосудах, движение самолета, пули, снаряда, ракеты, автомобиля, лопастей вентилятора, парашюта, полет птиц и насекомых, семечка одуванчика — все эти движения подчиняются законам гидро- и аэродинамики. Стремительное развитие авиации и ракетной техники, водного транспорта во многом связано с этим разделом механики. Изучение движения жидкостей и газов имеет очень важное значение для техники.

Жидкости и газы существенно отличаются друг от друга. Различие между жидкостями и газами обусловлено большой сжимаемостью газов. Несмотря на это, явления в неподвижных жидкостях и газах, как мы видели, аналогичны (закон Паскаля, закон Архимеда).

При исследовании движения в жидкостях и газах эта аналогия во многом сохраняется.

Опыты и расчеты показывают, что при скоростях, значительно меньших скорости звука (при нормальных условиях 340 м/с), можно не учитывать сжимаемость воздуха и других газов (она достаточно мала). Это дает право применять к газам те же законы, что и к очень мало сжимаемым жидкостям. Поэтому в дальнейшем под словом «жидкость» мы будем понимать как жидкости, так и газы в обычном значении этих слов.

Заметим, что при скоростях, близких к скорости звука и превосходящих ее, сжимаемость газов становится существенной. При этом газы сильно разогреваются. Такого рода процессы нельзя исследовать только законами механики, не учитывая тепловые явления.

В общем случае движения жидкости нужно учитывать наличие сил внутреннего трения или *вязкости*. Вязкостью называется свойство жидкости оказывать сопротивление относительному перемещению своих частей.

Явления, связанные с вязкостью и сжимаемостью, усложняют исследование движения жидкости. Поэтому вначале полезно отвлечься от усложнений, вносимых ими в картину движения жидкостей. Жидкость, вязкостью и сжимаемостью которой можно пренебречь, называют идеальной жидкостью. Мы в основном будем рассматривать явления в *идеальной жидкости*.

Наблюдение движения жидкостей

Один из способов наблюдения течения жидкости состоит в том, что к жидкости подмешивают алюминиевый порошок и следят при сильном освещении за движением алюминиевых

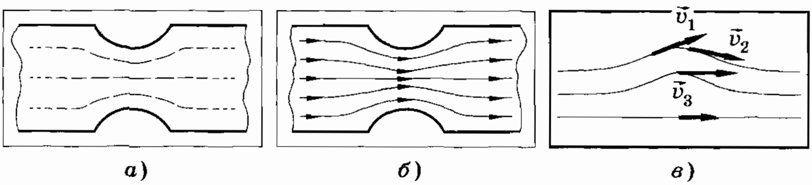


Рис. 9.35

блесток. Если сфотографировать жидкость с малой выдержкой, то каждая блестка дает на фотографии небольшую черточку, длина которой пропорциональна модулю скорости частиц жидкости, а направление движения указывает на направление их скорости. Полученная таким способом фотография дает наглядную картину распределения скоростей, существующих в данный момент в жидкости.

На рисунке 9.35, *а*, сделанном с фотографии текущей жидкости, видно, что наибольшая скорость наблюдается в самом узком сечении трубы.

При более длительной выдержке черточки на фотографии сливаются в сплошные линии (рис. 9.35, *б*), представляющие собой траектории частиц, которые совпадают с так называемыми линиями тока. Под этим термином понимают *линии, проведенные так, что касательные к ним совпадают по направлению со скоростями частиц жидкости в соответствующих точках пространства* (рис. 9.35, *в*). По картине линий тока можно судить не только о направлении, но и о модуле скорости $\vec{v}$ в разных точках пространства текущей жидкости: там, где скорость больше, линии тока расположены гуще и, наоборот, где скорость меньше, линии тока расположены реже (см. рис. 9.35, *б*).

Ламинарное и турбулентное течение

Движение жидкости, при котором отдельные слои ее скользят друг относительно друга, не перемешиваясь, называется ламинарным (слоистым) течением. Движение жидкости, сопровождающееся перемешиванием ее различных слоев с образованием завихрений, называется турбулентным (вихревым).

Все многообразие движений жидкости можно разделить на эти два вида движения. Ламинарным является течение воды в спокойных реках. Оно наиболее просто и поэтому хорошо изучено. Мы в основном ограничимся рассмотрением ламинарного течения.

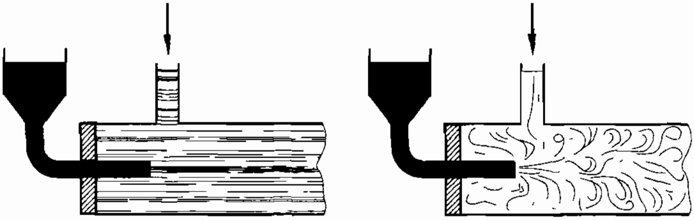


Рис. 9.36

Однако наиболее распространенным является турбулентное движение. Именно с ним чаще всего имеют дело при изучении явлений в атмосфере, в потоках быстрых рек и океанских течениях и т. п. Примерами турбулентного движения могут служить беспорядочное движение дыма из заводских труб, завихрения воды в реках за сваями мостов и за кормой быстроходного катера, движение газов, выбрасываемых из выхлопных труб двигателей внутреннего сгорания и ракетных двигателей, образование смерчей и т. п.

Ламинарное течение переходит в турбулентное, если увеличивается скорость течения. Течение жидкости удобно наблюдать с помощью прибора, изображенного на рисунке 9.36, *а, б*. Прибор состоит из широкой стеклянной трубки, соединенной через боковой отросток с водопроводом. В торец трубки через пробку введена тоненькая трубочка, соединенная с сосудом, в который налита подкрашенная жидкость. Пока скорость воды невелика, струйка подкрашенной жидкости спокойно, не распадаясь, движется вместе с водой по трубе. Это ламинарное течение (см. рис. 9.36, *а*).

Постепенно открывая водопроводный кран, мы можем так увеличить скорость движения воды, что возникнет турбулентное течение. Жидкость завихряется, и окрашенная струйка размывается в широкую ленту с неровными краями (рис. 9.36, *б*).

Турбулентное движение в реальных жидкостях очень сложно. До сих пор нет полной теории его, хотя проблемы турбулентности изучаются уже более ста лет.

Наиболее простым является ламинарное (без завихрений) движение жидкостей. Его мы будем изучать в дальнейшем. Турбулентное (вихревое) движение наиболее часто встречается, но слишком сложно для изучения его в школе.

§ 9.9. КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

При описании движения жидкости можно поступить так же, как и при рассмотрении движения твердого тела: разбить жидкость на малые элементы и следить за движением каждого такого элемента в пространстве с течением времени. Картина движения элементов жидкости в общем случае очень сложна. Как правило, проследить за движением отдельных элементов жидкости очень трудно. Поэтому обычно используют другой способ описания.

Вместо того чтобы следить за движением отдельных элементов жидкости, можно фиксировать скорости различных элементов жидкости в одних и тех же точках пространства.

Стационарное движение жидкости. Трубки тока

Скорости элементов жидкости в различных точках пространства, вообще говоря, различны. Если во всех точках пространства скорости элементов жидкости не меняются со временем, то движение жидкости называется стационарным (установившимся). При стационарном течении любая частица жидкости проходит данную точку с одним и тем же значением скорости $\vec{v}$. В другой какой-либо точке скорость частицы будет иной, но также постоянной во времени.

Картина линий тока при стационарном течении остается неизменной. Линии тока в этом случае совпадают с траекториями частиц.

Объем жидкости, ограниченный линиями тока, называется трубкой тока (рис. 9.37). Скорости элементов жидкости в каждой точке поверхности трубки тока направлены по касательной к этой поверхности. Поэтому частицы при своем движении не пересекают стенок трубки тока. При исследовании течения жидкости вместо реальных труб можно рассматривать трубки тока.

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

Разобьем жидкость, текущую по трубе переменного сечения, на отдельные трубки тока, настолько тонкие, что в каждом сечении скорости элементов жидкости можно считать одинаковыми.

Рассмотрим два сечения трубки тока с площадями S_1 и S_2 (рис. 9.38). Обозначим через $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ соответствующие скорости течения жидкости.

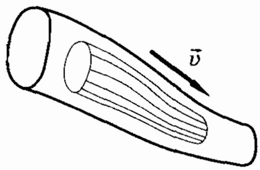


Рис. 9.37

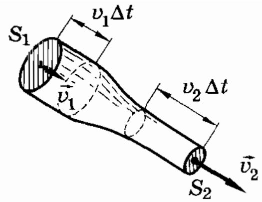


Рис. 9.38

За малое время Δt через первое сечение проходит жидкость, масса которой равна $\rho_1 S_1 v_1 \Delta t$, а через второе — $\rho_2 S_2 v_2 \Delta t$. Здесь ρ_1 и ρ_2 — плотности жидкости в первом и втором сечениях. Для несжимаемой жидкости $\rho_1 = \rho_2$ и объем жидкости, прошедшей через первое сечение, равен объему жидкости, протекающей через второе сечение:

$$S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t, \qquad (9.9.1)$$

ведь жидкость не пересекает стенок трубки тока и не может в ней накапливаться вследствие несжимаемости.

Разделив обе части равенства (9.9.1) на Δt, получим:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2,$$

или

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}. \qquad (9.9.2)$$

Результат можно сформулировать так: *модули скоростей несжимаемой жидкости в двух сечениях трубки тока обратно пропорциональны площадям сечений.* Соотношение (9.9.2) представляет собой уравнение неразрывности несжимаемой жидкости. Оно справедливо как для стационарного течения, так и для нестационарного.

Согласно уравнению неразрывности скорость жидкости в узких местах трубки больше, чем в широких.

Наш результат справедлив непосредственно для узких трубок тока. Однако если скорости при переходе от одной трубки тока к другой вдоль одного и того же сечения потока (например, в трубке с твердыми стенками) меняются не очень значительно, то уравнение неразрывности можно приближенно применять и для течения всей жидкости. В этом случае под $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ следует понимать средние по сечениям скорости жидкости.

Если при течении жидкости сжимаемостью жидкости можно пренебречь, то справедливо уравнение неразрывности.

§ 9.10. ДАВЛЕНИЕ В ДВИЖУЩИХСЯ ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

При изучении гидростатики мы выясняли, как распределяется давление в неподвижной жидкости (см. § 9.5). *Теперь познакомимся с распределением давления в движущейся жидкости.*

Вначале обратимся к опытным фактам. Возьмем трубку переменного сечения с небольшими отверстиями в стенке, в которые вставлены стеклянные открытые сверху измерительные трубки (рис. 9.39). При стационарном течении жидкость в каждой измерительной трубке поднимается до определенной высоты (высоты необходимо отсчитывать от какого-либо горизонтального уровня). По высоте столба жидкости в измерительных трубках можно судить о ее давлении на стенки горизонтальной трубки. Опыт показывает, что в широких местах трубки давление больше, чем в узких. Но чем больше сечение трубки, тем меньше скорость течения жидкости (см. § 9.9). Следовательно, можно сделать вывод:

При стационарном течении жидкости давление больше в тех местах, где меньше скорость течения, и, наоборот, меньше в тех местах, где скорость течения больше.

Эта зависимость была установлена Д. Бернулли[1].

Факт уменьшения давления с увеличением скорости жидкости на первый взгляд кажется парадоксальным. Казалось бы, что при переходе из широкой части трубки в узкую жидкость должна сжиматься, поэтому давление внутри нее и на стенки трубки должно возрастать. В действительности же все происходит наоборот. Сначала попытаемся объяснить это явление качественно на основе второго закона Ньютона и условия неразрывности стационарного потока жидкости, считая жидкость идеальной.

Выделим элемент жидкости, который движется вдоль оси трубки. При переходе из широкой части трубки в узкую скорость течения увеличивается, поэтому ускорение выделенного элемента жидкости направлено по течению, а при переходе из узкой части в широкую — против течения. Согласно второму за-

---

[1] Бернулли Даниил (1700—1782) — швейцарский физик, академик Петербургской академии наук с 1725 по 1733 г., а позже — ее иностранный почетный член.

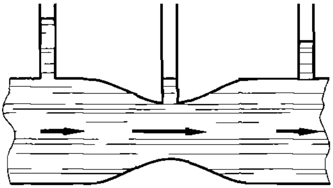


Рис. 9.39

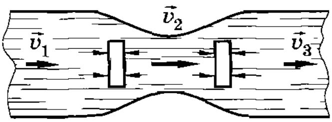


Рис. 9.40

кону Ньютона ускорение вызывается силой и совпадает с ней по направлению. Такой силой может быть лишь равнодействующая сил давления окружающей жидкости на поверхность выделенного объема. Значит, давление на элемент жидкости при переходе его из широкой части трубки в узкую должно быть больше со стороны жидкости в широкой части трубки, чем со стороны узкой (рис. 9.40). При переходе же элемента из узкой части трубки в широкую ускорение направлено против течения. В эту же сторону должна быть направлена равнодействующая сил давления, что опять-таки возможно, если давление жидкости со стороны широкой части трубки больше, чем со стороны узкой.

Чем быстрее движется жидкость, тем меньше давление внутри нее.

§ 9.11. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Зависимость давления идеальной жидкости от скорости ее стационарного течения и перепада высоты была установлена в математической форме Д. Бернулли в 1738 г.

Наиболее просто уравнение Бернулли можно вывести, если применить закон сохранения механической энергии к потоку жидкости. Для движения идеальной жидкости закон сохранения применим, так как в идеальной жидкости нет сил трения[1].

Пусть труба переменного сечения расположена наклонно к горизонту. Выделим некоторый объем жидкости между сече-

[1] Строго говоря, уравнение Бернулли следует выводить для достаточно узкой трубки тока. Но в идеальной жидкости вязкостью можно пренебречь и считать скорости отдельных элементов жидкости в данном сечении всего потока примерно одинаковыми.

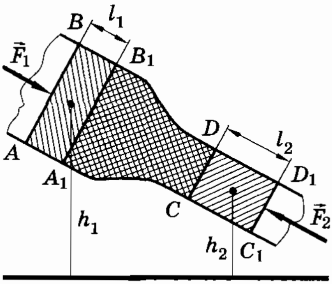


Рис. 9.41

нием AB в широкой части трубы и сечением CD в узкой части (рис. 9.41).

Пусть площадь поперечного сечения, давление и модуль скорости потока в широкой части соответственно равны S_1, p_1, v_1, а в узкой части — S_2, p_2, v_2.

Если жидкость течет слева направо, то под действием сил давления $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ и силы тяжести выделенный объем жидкости за малое время Δt сместится вправо и займет часть трубы, ограниченную сечениями A_1B_1 и C_1D_1. Силы давления $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ совершат работу

$$A = A_1 + A_2 = F_1l_1 - F_2l_2 = p_1S_1v_1\Delta t - p_2S_2v_2\Delta t.$$

Существенно, что при стационарном течении жидкости энергия объема жидкости, заключенного между сечениями A_1B_1 и CD (изображен на рисунке 9.41 двойной штриховкой), остается неизменной. Все происходит так, как если бы жидкость, занимавшая объем ABB_1A_1, переместилась бы и заняла объем CDD_1C_1. Поэтому достаточно учесть лишь изменение энергии элемента жидкости, переходящей из области ABB_1A_1 в область CDD_1C_1. Работа внешних сил давления согласно закону сохранения энергии равна изменению энергии этого элемента. Его объем ΔV не изменяется вследствие несжимаемости жидкости.

Изменение энергии этого элемента жидкости равно:

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_p = \frac{1}{2}\rho\Delta V(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(S_2l_2h_2 - S_1l_1h_1).$$

Учитывая, что $\Delta E = A$, получим:

$$\frac{1}{2}\rho\Delta V(v_2^2 - v_1^2) + \rho g(\Delta Vh_2 - \Delta Vh_1) = \rho_1S_1v_1\Delta t - \rho_2S_2v_2\Delta t.$$

Так как $S_1v_1\Delta t = S_2v_2\Delta t = \Delta V$, то после сокращения на ΔV находим:

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gh_2 - \rho gh_1 = p_1 - p_2.$$

Откуда

$$\boxed{p_1 + \rho gh_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho gh_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}.} \qquad (9.11.1)$$

Это и есть **уравнение Бернулли** для течения идеальной жидкости.

В этом уравнении $\frac{\rho v^2}{2}$ — плотность[1] кинетической энергии, а $\rho g h$ — плотность потенциальной энергии. Согласно уравнению Бернулли **сумма давления и плотностей кинетической и потенциальной энергий при стационарном течении идеальной жидкости остается постоянной для любого сечения потока.**

Если труба горизонтальна, то $h_1 = h_2$ и уравнение принимает вид

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}. \qquad (9.11.2)$$

Уравнение (9.11.2) показывает, что с увеличением скорости течения ($v_2 > v_1$) давление в жидкости, текущей по горизонтальной трубе, уменьшается ($p_2 < p_1$). Это подтверждается опытом, который был нами рассмотрен в предыдущем параграфе.

Уравнение Бернулли описывает наиболее простой случай течения жидкости: течение стационарно, а вязкостью и сжимаемостью жидкости можно пренебречь.

§ 9.12. ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

Используя уравнение Бернулли, можно объяснить ряд интересных явлений и решить многие задачи. Оно находит также широкое применение в технике.

Измерение давления и скорости

Чтобы измерить давление в текущей жидкости, надо расположить трубку манометра так, чтобы она возможно меньше искажала течение жидкости. Именно так расположены манометрические трубки в трубе, изображенной на рисунке 9.39. А что будет показывать манометр, если его трубку расположить так, чтобы отверстие трубки было направлено навстречу потоку (рис. 9.42, *а*)? В этом случае скорость жидкости перед отверстием равна нулю; линии тока перед манометром расходятся, не попадая в область

---

[1] Плотность энергии жидкости — это величина, равная отношению энергии, которой обладает жидкость, к занимаемому ею объему.

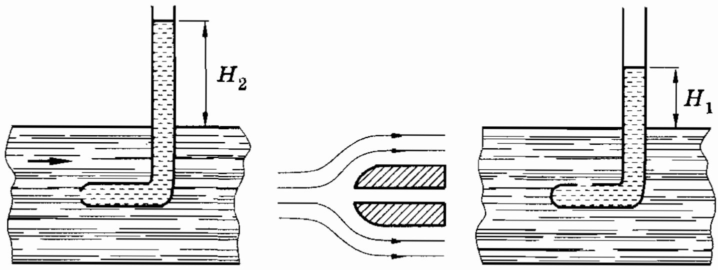


Рис. 9.42

перед отверстием (см. рис. 9.42, *а,* справа). Применим уравнение Бернулли (9.11.2). Подставляя $v_2 = 0$, получим:

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2. \qquad (9.12.1)$$

Давление p_1 измеряется с помощью манометрической трубки, помещенной в поток жидкости так, как показано на рисунке 9.42, *б* (у нее плоскость отверстия расположена параллельно линиям тока). Течение жидкости вдоль боков трубки остается практически таким же, как и без трубки. Это означает, что показание манометра будет совпадать с показанием манометра, который движется вместе с жидкостью.

Манометр, обращенный отверстием к потоку, измерит большее давление, чем манометр с отверстием, параллельным линиям тока. Избыток давления $\frac{1}{2}\rho v_1^2$ получается потому, что частицы жидкости тормозятся перед манометром, вследствие этого давление повышается. Создается «динамический напор». Измерив давления p_2 и p_1, можно, пользуясь формулой (9.12.1), определить скорость потока v_1.

Пусть поток жидкости возникает, например, вследствие движения в воде подводной лодки. Тогда, применив рассмотренный выше способ, можно измерить скорость лодки. Согласно формуле (9.12.1) она равна:

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_2 - p_1)}. \qquad (9.12.2)$$

Уравнение Бернулли справедливо и для газов, если скорость течения достаточно мала, так как в этом случае можно пренебречь их сжимаемостью. Формула (9.12.2) может быть использована в этом случае для определения скорости самолета.

Скорость истечения жидкостей из отверстия в сосуде

С помощью уравнения Бернулли можно найти скорость истечения идеальной жидкости из отверстия, расположенного в сосуде на глубине h относительно поверхности жидкости. Если сосуд широкий, а отверстие мало, то скорости жидкости в сосуде малы. Ко всему потоку жидкости в целом можно применить уравнение Бернулли. В верхнем сечении (рис. 9.43) у поверхности жидкости давление p_0 равно атмосферному, а скорость $v_0 \approx 0$. В нижнем сечении трубки — в отверстии давление также равно атмосферному. Если скорость в отверстии обозначить через v, то из выражения (9.11.1) для этих двух сечений получим:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p_0 = \rho g h + p_0,$$

или

$$v = \sqrt{2gh}, \tag{9.12.3}$$

где h — высота жидкости в сосуде над отверстием.

Истечение происходит с той же скоростью, какую имело бы тело при свободном падении с высоты h. Этот результат вытекает и из закона сохранения механической энергии, так как жидкость идеальная (без вязкости).

Опыты, объясняемые уравнением Бернулли

1) Опыт с картонным кружком и катушкой. Положите на стол небольшой картонный кружок, в центр которого вставлена булавка или небольшой гвоздик. Приблизьте к кружку катушку от ниток так, чтобы булавка входила в отверстие (для направляющего действия), и начните сильно дуть через верхнее отверстие катушки (рис. 9.44). Вы увидите, что

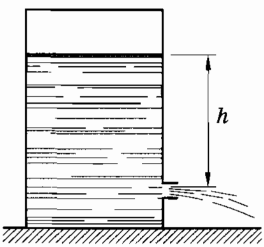


Рис. 9.43

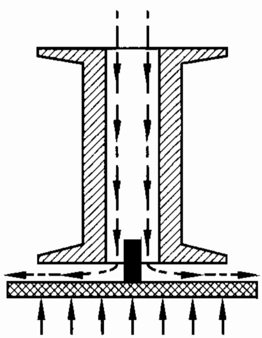


Рис. 9.44

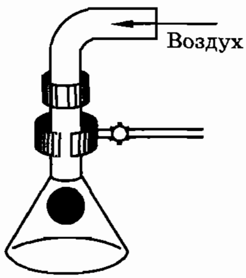


Рис. 9.45

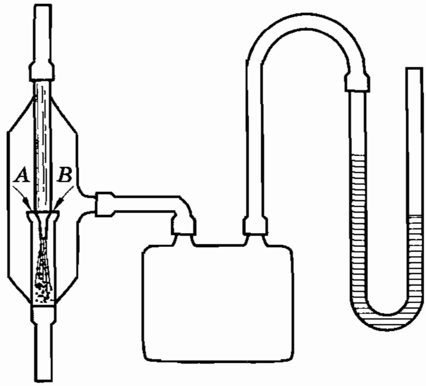


Рис. 9.46

кружок протянется к катушке. В узком промежутке между катушкой и кружком скорость воздушной струи может достичь такого значения, при котором давление внутри струи на кружок станет меньше атмосферного. В результате кружок картона прижмется к катушке. Потом он отскочит под напором воздуха и вновь прижмется к катушке, т. е. будет вибрировать.

2) Опыт с двумя листами бумаги. Расположите два листа бумаги параллельно друг другу и подуйте между ними. Вы заметите резкое сближение листов — они как бы слипаются. Объяснение аналогично объяснению предыдущего опыта.

3) Опыт с воронкой и легким шариком. Легкий целлулоидный шарик кладут на руку и вводят его снизу в воронку, приближая шарик к входной трубке. Затем сильно продувают воздух через трубку (рис. 9.45) и наблюдают, что шарик поднимается внутрь конуса воронки, где создается пониженное давление. Слегка вибрируя, шарик удерживается там.

Использование уравнения Бернулли в технике

Зависимость давления в жидкости и газе от их скорости лежит в основе принципа действия многих устройств и приборов. На рисунке 9.46 изображена схема устройства водоструйного насоса. Струя воды подается в трубку *A*, имеющую на одном конце сужение. По сужению вода течет с большей скоростью. Из-за этого давление в струе в этом месте оказывается меньше атмосферного, воздух из сосуда всасывается в струю через трубку *B* и удаляется вместе с водой.

На рисунке 9.47 изображен простейший пульверизатор, состоящий из двух трубок, расположенных перпендикулярно друг другу. Через горизонтальную трубку продувается воздух. В узкой части струи при выходе из трубки давление меньше атмосферного. Атмосферное давление поднимает жидкость по вертикальной трубке, и она распыляется струей воздуха.

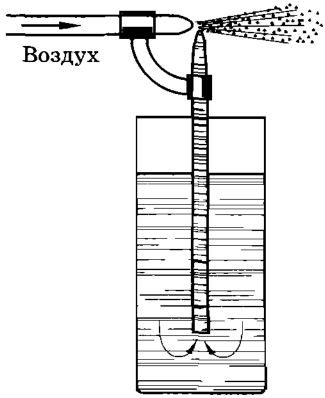


Рис. 9.47

Важнейшее применение всасывающее действие струи находит в карбюраторе — приборе, предназначенном для питания двигателя внутреннего сгорания горючей смесью (рис. 9.48). Во время всасывающих тактов движения поршня двигателя наружный воздух проходит по трубе, которая имеет суженную часть — диффузор. В диффузоре помещен жиклер (распылитель воздуха) — трубка с малым отверстием. Жиклер соединен с поплавковой камерой карбюратора. При прохождении потока воздуха его скорость в диффузоре резко возрастает, давление становится меньше атмосферного и атмосферное давление выталкивает бензин из поплавковой камеры через жиклер. Бензин распыляется в потоке воздуха — образуется рабочая смесь, которая поступает в цилиндр двигателя.

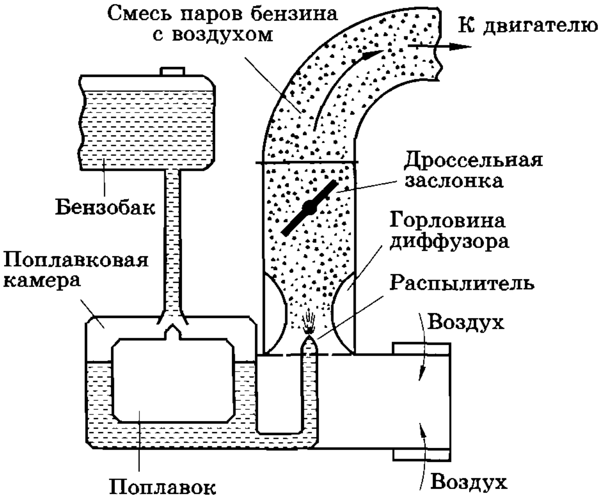


Рис. 9.48

Уравнение Бернулли, хотя и является приближенным, позволяет понять сущность очень многих явлений и придумать устройства, действие которых основано на приближенной применимости уравнения Бернулли к реальным процессам.

? 1. Почему запрещается стоять вблизи быстро идущего поезда?
2. Если вы проходите мимо занавески или шторы, то она притягивается к вам. Почему?
3. Направьте струю воздуха из пылесоса вверх. Поместите в струю шарик от пинг-понга. Объясните его устойчивое положение в струе.
4. Можно ли выдуть из воронки вложенный в нее бумажный фильтр, если дуть с узкого конца воронки?
5. Почему во время бурь, когда скорость ветра достигает значительной величины, ветер срывает крыши построек? При этом крыша либо ломается по линии конька и раскрывается, как книга, либо же приподнимается вверх и относится ветром в сторону.
6. Почему две баржи, проплывающие близко друг к другу в одном направлении, могут столкнуться?

§ 9.13. ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Если при движении жидкости (или газа) существенным оказывается трение, то вся теория чрезвычайно усложняется. Мы приведем лишь простые факты о влиянии вязкости жидкости на ее течение.

При движении жидкости, например в трубе, реке, скорости различных слоев неодинаковы. У краев трубы или у берегов и дна реки скорость меньше, чем в середине. На рисунке 9.49 приведена диаграмма распределения скорости по сечению трубы: скорость слоев меняется от нуля (у стенок трубы) до некоторого максимального значения (в середине трубы или реки). Этот факт отмечен даже в былине о Добрыне Никитиче, где говорится: средняя «струйка как огонь сечет». Обусловлен он силами трения.

Для наблюдения сил трения в жидкостях можно проделать следующий опыт. Если вертикальный цилиндрический сосуд, наполненный жидкостью, привести в равномерное вращение вокруг своей оси, то жидкость постепенно приходит во вращение. Для улучшения условий наблюдения на поверхность жидкости надо равномерно набросать маленькие кусочки пробки. Сначала начинают вращаться слои жидкости, прилегающие к

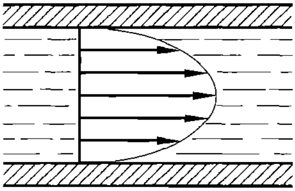


Рис. 9.49

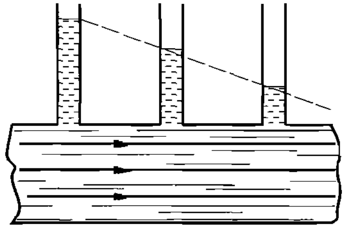


Рис. 9.50

стенкам сосуда. Затем вращение передается внутренним слоям. Таким образом, происходит передача вращения от сосуда к жидкости, а также от наружных слоев жидкости к внутренним. Такая передача не была бы возможной, если бы не существовало касательных сил, действующих между жидкостью и стенкой сосуда, а также между слоями самой жидкости, т. е. если бы жидкость была идеальной.

Вследствие различия скоростей между слоями жидкости возникает внутреннее трение. Оно тем больше, чем больше изменение скорости от слоя к слою. Таким образом, при течении реальных жидкостей, кроме сил нормального давления, на границах движущихся элементов жидкости возникают еще *касательные силы внутреннего трения*, или *силы вязкости.*

Наличие сил трения в жидкостях приводит к тому, что течение жидкости по трубе постоянного сечения возможно лишь при наличии перепада давления на входе и выходе трубы. Этот перепад давления необходим для поддержания стационарного течения, чтобы уравновешивать силы трения.

По закону Бернулли при стационарном течении жидкости по трубе постоянного сечения давление во всех точках жидкости одинаково. В действительности же давление в трубе падает в направлении ее течения по линейному закону.

Убедиться в этом можно на опыте. Поставим вдоль трубы, расположенной горизонтально, манометрические трубки. Заметим, что при отсутствии течения высота жидкости в трубках одинакова. При течении жидкости распределение уровней в трубках становится неодинаковым (рис. 9.50).

Из-за вязкости давление в жидкости уменьшается вдоль потока даже в горизонтально расположенной трубе постоянного сечения.

§ 9.14. ПОДЪЕМНАЯ СИЛА КРЫЛА САМОЛЕТА

Современный самолет — это сложнейшее сооружение, состоящее из сотен тысяч деталей, электронно-вычислительных устройств. Полетная масса самолетов достигает нескольких сотен тонн. Как же возникает подъемная сила, удерживающая самолет в воздухе?

Со стороны атмосферы на крылья и корпус самолета действуют огромные силы давления. К примеру, площадь нижней поверхности крыла современного пассажирского самолета Ил-62 равна 240 м^2, а вместе с поверхностью стабилизаторов достигает 280 м^2. Атмосферное давление равно 10^5 Па, поэтому на крылья воздух действует с силой $2{,}8 \cdot 10^7$ Н. Эта сила в 18 раз превышает вес самолета с пассажирами (полетный вес самолета Ил-62 равен $1{,}54 \cdot 10^6$ Н).

Для возникновения подъемной силы давление воздуха на нижнюю поверхность крыла должно быть больше, чем на верхнюю.

Такое перераспределение давления обычно происходит при обтекании крыла воздушным потоком. Рассчитаем избыточное давление, необходимое для того, чтобы возникла подъемная сила, равная силе тяжести, действующей на самолет Ил-62:

$$\frac{1{,}54 \cdot 10^6 \text{ Н}}{280 \text{ м}^2} = 5{,}5 \cdot 10^3 \text{ Па}.$$

Это избыточное давление составляет примерно 0,05 от нормального атмосферного давления. Пример показывает, что для взлета самолета достаточно создать небольшое избыточное давление. Как же оно возникает?

Когда воздушный поток начинает обтекать крыло, то из-за действия сил трения у задней кромки крыла образуется вихрь, в котором воздух вращается против часовой стрелки, если крыло движется влево (рис. 9.51). Но по законам механики при возникновении вращения против часовой стрелки должно возникнуть вращение по часовой стрелке[1].

Такое вращение воздуха и возникает вокруг крыла. На обтекающий крыло поток накладывается циркуляция воздуха во-

[1] Это следует из закона сохранения момента импульса, о котором шла речь в главе 7.

круг крыла. В результате скорость воздушного потока над крылом оказывается больше, чем под крылом, так как над крылом скорость циркуляции имеет такое же направление, как и скорость набегающего на крыло потока, а под крылом эти скорости противоположны по направлению. Но согласно закону Бернулли давление должно быть больше там, где скорость меньше. Следовательно, под крылом давление больше, чем над ним. Из-за этого и возникает подъемная сила.

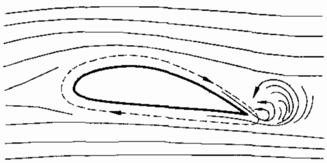


Рис. 9.51

Теория возникновения подъемной силы крыла при обтекании его потоком газа была впервые разработана русским ученым Н. Е. Жуковским.

Можно приближенно оценить, от чего зависит перепад давлений вокруг крыла. Если самолет движется со скоростью $\vec{v}$ относительно воздуха, то в системе координат, связанной с самолетом, крыло неподвижно, а на него набегает воздушный поток с такой же по модулю скоростью. Обозначим модуль скорости циркулирующего потока через u. Тогда модуль скорости воздуха над крылом будет равен $v_1 = v + u$, а под крылом $v_2 = v - u$. Запишем закон Бернулли:

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2.$$

Откуда

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) = 2\rho v u.$$

В нижних слоях атмосферы, где плотность воздуха больше, достаточная подъемная сила может возникнуть и при малых скорос-

Жуковский Николай Егорович (1847—1921) — знаменитый русский ученый, основоположник современной гидро- и аэродинамики. Он создал теорию подъемной силы крыла самолета, разработал вихревую теорию воздушного винта и теорию гидравлического удара.

Созданный Жуковским в 1918 г. Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ) сыграл исключительную роль в развитии современной авиации.

тях движения самолета $\vec{v}$. На больших высотах плотность воздуха уменьшается, но там могут быть развиты значительные скорости и за счет этого будет возникать необходимая подъемная сила.

Скорость самолета Ил-62 равна 900 км/ч, а на тех высотах, где он летает, плотность воздуха порядка 1 кг/м^3. Поэтому при скорости циркуляции порядка 10 м/с возникает необходимый для полета перепад давлений:

$$\Delta p = 2 \cdot 1 \cdot \frac{900 \cdot 10^3}{3600} \cdot 10 \text{ Па} = 5 \cdot 10^3 \text{ Па}.$$

Закон Бернулли дает возможность понять, почему возникает подъемная сила у крыла самолета. Скорость обтекания воздухом верхней кромки крыла больше, чем нижней. Поэтому давление воздуха на нижнюю кромку крыла больше, чем на верхнюю.

§ 9.15. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

В задачах на расчет деформаций твердых тел используется понятие напряжения (9.3.1), закон Гука в форме (9.3.2) и (9.3.4), а также понятие предела прочности и запаса прочности (9.3.5).

При решении задач по гидростатике используются основные законы этого раздела: закон Паскаля и закон Архимеда. В этом разделе иногда применяют условия равновесия твердого тела. При рассмотрении равновесия тел в неинерциальных системах отсчета необходимо учитывать силы инерции. Задачи о плавании тел решаются на основе условий равновесия.

Задачи гидродинамики решаются с использованием уравнения Бернулли, но можно решать их, применяя закон сохранения энергии.

Задача 1

Какую силу надо приложить к латунной проволоке длиной $l_0 = 3$ м и площадью сечения $S = 1$ мм^2 для ее удлинения на $\Delta l = 1{,}5$ мм?

Решение. Согласно закону Гука $\sigma = E\varepsilon$, где $E = 10^{11}$ Па — модуль Юнга для латуни, $\sigma = \frac{F}{S}$ — напряжение и $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ — относительное удлинение.

Закон Гука можно записать в форме

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l_0},$$

отсюда

$$F = \frac{ES\Delta l}{l_0}.$$

Выразим данные величины в единицах СИ: $S = 10^{-6}$ м^2, $\Delta l = 1,5 \cdot 10^{-3}$ м. Найдем модуль деформирующей силы:

$$F = \frac{10^{11} \cdot 10^{-6} \cdot 1,5 \cdot 10^{-3}}{3} \text{ Н} = 50 \text{ Н}.$$

Задача 2

Какой наибольшей высоты можно выложить башню из кирпича, предел прочности на сжатие у которого равен $6 \cdot 10^6$ Па, если принять запас прочности равным 10? Плотность кирпича 1800 кг/м^3.

Решение. Зная запас прочности, находим допустимое напряжение $\sigma_{\text{доп}} = \frac{\sigma_{\text{пч}}}{n}$. Деформирующей силой является сила тяжести, действующая на башню. Максимально допустимое напряжение испытывает основание башни:

$$\sigma_{\text{доп}} = \frac{mg}{S} = \frac{\rho g h S}{S} = \rho g h.$$

Учитывая запас прочности, получаем:

$$\rho g h = \frac{\sigma_{\text{пч}}}{n}.$$

Отсюда

$$h = \frac{\sigma_{\text{пч}}}{\rho g h} \approx 33,3 \text{ м}.$$

Задача 3

Шарик из дерева плотностью $\rho_1 = 500$ кг/м^3 удерживается в воде в затопленном состоянии легкой пружиной (рис. 9.52). Чему равно растяжение x_2 пружины, если подвешенный в воздухе шарик растягивает ее на $x_1 = 1$ см? Объемом пружины пренебречь. Плотность воды $\rho_2 = 10^3$ кг/м^3.

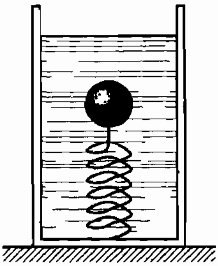


Рис. 9.52

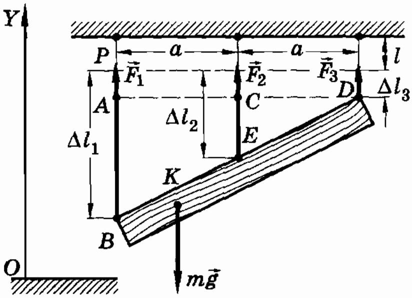


Рис. 9.53

Решение. Когда шарик висит на пружине в воздухе, то сила упругости пружины уравновешивает силу тяжести, действующую на шарик:

$$F_1 = mg \text{ или } kx_1 = \rho_1 Vg, \qquad (9.15.1)$$

где k — жесткость пружины и V — объем шарика.

На шарик в затопленном состоянии вниз действуют сила тяжести и сила упругости со стороны растянутой пружины. Эти силы уравновешиваются действующей вверх на шарик архимедовой силой:

$$F_2 + mg = F_A \text{ или } kx_2 = \rho_2 Vg - \rho_1 Vg. \qquad (9.15.2)$$

Разделив почленно (9.15.2) на (9.15.1), получим:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho}.$$

Откуда

$$x_2 = \frac{x_1(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1} \approx 0{,}01\text{м}.$$

Задача 4

Неоднородная твердая балка BD массой m подвешена на трех одинаковых параллельных тросах, расположенных на равных расстояниях друг от друга. Один из тросов прикреплен в середине балки, а два других — на ее концах. Определите силы реакции тросов, если центр тяжести балки расположен на расстоянии $BK = \frac{1}{4}BD$ от точки B балки (рис. 9.53).

Решение. Обозначим искомые силы через $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$. Расстояния между тросами будем считать равными a. Сила тяжести приложена в точке K на расстоянии $\frac{a}{2}$ от точки B.

Законы статики дают нам два условия равновесия: равенство нулю суммы проекций сил на ось Y:

$$F_1 + F_2 + F_3 - mg = 0$$

и равенство нулю суммы моментов этих сил относительно оси, проходящей, например, через точку B:

$$F_2 a + F_3 \cdot 2a - mg\frac{a}{2} = 0.$$

Мы получили два уравнения с тремя неизвестными. Если считать тросы абсолютно твердыми, как это мы делали в статике, то больше никаких уравнений получить нельзя.

Чтобы найти недостающее уравнение, будем считать тросы упругими телами, подчиняющимися закону Гука. Пусть тросы имеют одинаковую длину, но сделаны из разных материалов и имеют разные площади S_1, S_2, S_3 поперечных сечений. Модули Юнга тросов соответственно равны E_1, E_2, E_3.

Под действием нагрузки тросы получают абсолютные удлинения Δl_1, Δl_2, Δl_3 (см. рис. 9.53). Для каждого троса на основании закона Гука можно записать:

$$\sigma_1 = E_1\frac{\Delta l_1}{l},\ \sigma_2 = E_2\frac{\Delta l_2}{l},\ \sigma_3 = E_3\frac{\Delta l_3}{l},$$

где σ_1, σ_2, σ_3 — напряжения в тросах. Учитывая определение напряжения (9.3.1), получим:

$$\frac{F_1}{S_1} = E_1\frac{\Delta l_1}{l},\ \frac{F_2}{S_2} = E_2\frac{\Delta l_2}{l},\ \frac{F_3}{S_3} = E_3\frac{\Delta l_3}{l}.$$

Откуда

$$\Delta l_1 = \frac{lF_1}{E_1S_1},\ \Delta l_2 = \frac{lF_2}{E_2S_2},\ \Delta l_3 = \frac{lF_3}{E_3S_3}.$$

Так как BD — прямая линия, то из подобия треугольников ABD и CDE (см. рис. 9.53) можно записать:

$$\frac{\Delta l_1 - \Delta l_3}{\Delta l_2 - \Delta l_3} = \frac{2a}{a}$$

или

$$\frac{F_1}{E_1S_1} - \frac{F_3}{E_3S_3} = 2\left(\frac{F_2}{E_2S_2} - \frac{F_3}{E_3S_3}\right).$$

Это и есть недостающее третье уравнение. Решите самостоятельно полученную систему трех уравнений первой степени с тремя неизвестными в общем виде.

Мы в соответствии с условием задачи будем считать, что тросы сделаны из одного и того же материала и имеют одинаковые сечения. Тогда получим три следующих уравнения:

$$F_1 + F_2 + F_3 = mg,$$
$$2F_2 + 4F_3 = mg,$$
$$F_1 - 2F_2 + F_3 = 0.$$

Отсюда находим:

$$F_1 = \frac{7}{12}mg,\ F_2 = \frac{1}{3}mg,\ F_3 = \frac{1}{12}mg.$$

Задача 5

Сосуд с жидкостью движется горизонтально с постоянным ускорением $\vec{a}$, направленным горизонтально. Как расположится поверхность жидкости? Чему равно давление внутри жидкости в произвольной точке?

Решение. Проще всего решать задачу в неинерциальной системе отсчета, связанной с сосудом. Выделим на поверхности жидкости малый элемент жидкости массой Δm (рис. 9.54, *а*). В системе отсчета, связанной с сосудом, на выделенный элемент жидкости действуют три силы: сила тяжести $\Delta m\vec{g}$, сила инерции $\vec{F}_и$, направленная противоположно ускорению $\vec{a}$ системы, и сила нормальной реакции $\vec{N}$ со стороны остальной жидкости.

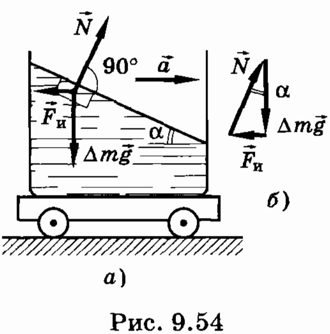
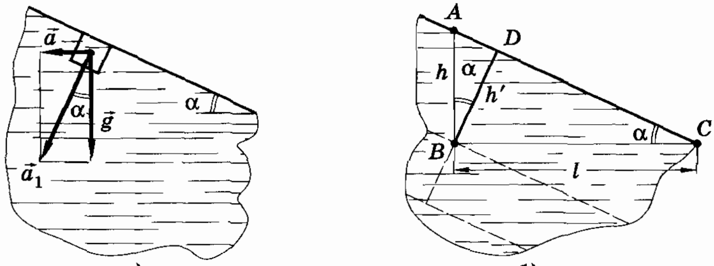


Рис. 9.54

Выделенный элемент жидкости находится в равновесии. Поэтому вектор $\vec{N}$ должен быть направлен противоположно сумме векторов $\vec{F}_и$ и $\Delta m\vec{g}$. А это значит, что свободная поверхность жидкости расположится не горизонтально, а наклонно — перпендикулярно вектору $\vec{N}$.

Согласно условию равновесия $\Delta m\vec{g} + \vec{F}_и + \vec{N} = 0$. При геометриче-



а) *б*)

Рис. 9.55

ском сложении этих сил они образуют замкнутый треугольник (рис. 9.54, *б*), из которого следует:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_{\text{и}}}{\Delta mg} = \frac{\Delta ma}{\Delta mg} = \frac{a}{g}. \qquad (9.15.3)$$

Откуда $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{a}{g}$. Такой угол поверхность жидкости образует с горизонтом.

Обозначим модуль ускорения, создаваемого силой тяжести и силой инерции (рис. 9.55, *а*), через a_1, тогда $a_1 = \sqrt{a^2 + g^2}$. Направление ускорения $\vec{a}_1$ должно быть перпендикулярно поверхности, так как оно создается результирующей силой $\vec{F}_{\text{и}} + m\vec{g}$, которая уравновешивает силу $\vec{N}$.

Давление в любой точке B внутри жидкости можно выразить через высоту h до поверхности жидкости по вертикали или через расстояние l до поверхности жидкости по горизонтали. Расстояние от точки B до поверхности жидкости по нормали к ней обозначим через h' (рис. 9.55, *б*).

Из прямоугольных треугольников ABD и DBC находим:

$$h' = h\cos\alpha = l\sin\alpha.$$

Но

$$\cos\alpha = \frac{g}{\sqrt{a^2 + g^2}} \text{ и } \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + g^2}}$$

(см. рис. 9.55, *а*). Поэтому

$$p = p_0 + \rho h'\sqrt{a^2 + g^2} = p_0 + \rho gh = p_0 + \rho al, \qquad (9.15.4)$$

где p_0 — давление на поверхность жидкости, ρ — плотность жидкости.

Из (9.15.4) следует, что уровни постоянного давления совпадают с плоскостями, параллельными поверхности жидкости.

Заметим, что при действии силы тяжести и горизонтально направленной силы инерции архимедова сила направлена не вертикально вверх, а по нормали к поверхности жидкости и равна:

$$F_A = \rho\sqrt{a^2 + g^2}. \qquad (9.15.5)$$

Задача 6

На поршень шприца, имеющий площадь S, действует постоянная сила $\vec{F}$. С какой скоростью $\vec{v}$ должна вытекать в горизонтальном направлении струя из отверстия шприца площадью s, если плотность жидкости равна ρ?

Решение. Пусть за время τ поршень перемещается на расстояние $u\tau$ (рис. 9.56), где u — модуль скорости поршня. Тогда сила совершает за это время работу $A = Fu\tau$. Масса вытекшей за время τ жидкости равна $\rho Su\tau$. Изменение кинетической энергии равно $\rho Su\tau\left(\frac{v^2}{2} - \frac{u^2}{2}\right)$. Согласно закону сохранения энергии

$$Fu\tau = \rho Su\tau\left(\frac{v^2}{2} - \frac{u^2}{2}\right). \qquad (9.15.6)$$

Модуль скорости истечения жидкости $\vec{v}$ связан с модулем скорости $\vec{u}$ соотношением (см. формулу (9.9.2)):

$$Su = sv. \qquad (9.15.7)$$

Исключая из двух последних уравнений u, найдем:

$$v = \sqrt{\frac{2F}{S\rho}\frac{1}{1 - \frac{s^2}{S^2}}}. \qquad (9.15.8)$$

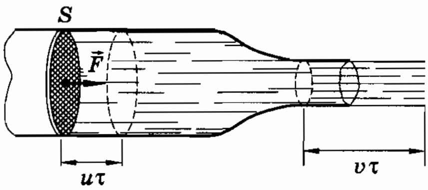


Рис. 9.56

Если, как обычно, $s << S$, то

$$v = \sqrt{\frac{2F}{S\rho}}.$$

Результат (9.15.8) можно получить короче с помощью уравнения Бернулли (9.9.2):

$$p_1 + \frac{\rho u^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v^2}{2}.$$

В нашем случае $p_1 = p_0 + \frac{F}{S}$, а $p_2 = p_0$,

где p_0 — атмосферное давление. Отсюда

$$\frac{F}{S} + p_0 + \frac{\rho u^2}{2} = p_0 + \frac{\rho v^2}{2}. \qquad \textbf{(9.15.9)}$$

Уравнения (9.15.6) и (9.15.9) эквивалентны.

Задача 7

В сосуд, в дне которого имеется узкое отверстие, закрытое пробкой, налита вода до высоты $h = 1$ м. На поверхности воды находится поршень массой $m = 1$ кг и площадью $S = 100$ см^2. Между поршнем и стенками сосуда вода не просачивается. Найдите скорость истечения воды из отверстия в дне сосуда сразу после того, как из отверстия будет вынута пробка. Трение не учитывать.

Решение. Воспользуемся уравнением Бернулли. Давление в струе воды равно атмосферному p_0. Давление под поршнем на высоте h от отверстия равно $p_0 + \frac{mg}{S}$. Скоростью течения жидкости под поршнем можно пренебречь, так как она мала по сравнению со скоростью истечения из отверстия, потому что площадь отверстия значительно меньше площади поршня (см. § 9.2). Согласно уравнению Бернулли

$$p_0 + \frac{\rho v^2}{2} = p_0 + \rho h g + \frac{mg}{S}.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{2gh + \frac{2mg}{\rho S}} \approx 4{,}9 \text{ м/с}.$$

Упражнение 16

1. Под действием какой силы, направленной вдоль оси стержня, в нем возникнет напряжение $1{,}5 \cdot 10^8$ Па, если диаметр стержня 0,4 см^2?
2. Чему равно напряжение у основания кирпичной стены высотой 20 м? Плотность кирпича равна 1800 кг/м^3.
3. Под действием силы 100 Н проволока длиной 5 м и сечением 2,5 мм^2 удлинилась на 1 мм. Определите напряжение, испытываемое проволокой, и модуль Юнга.
4. Стальная проволока сечением 2 мм^2 и длиной 4 м под действием силы $\vec{F}$ удлинилась на 2 мм. Найдите модуль этой силы. Модуль Юнга равен $2 \cdot 10^{11}$ Па.
5. Какую работу надо совершить, чтобы недеформированный резиновый шнур удлинить на 10 см? Площадь поперечного сечения шнура 1 см^2, первоначальная длина его 1 м, а модуль Юнга резины равен 10^7 Па.
6. Какую наименьшую длину должна иметь железная проволока, чтобы при вертикальном положении она разорвалась под действием собственного веса? Предел прочности $3{,}2 \cdot 10^8$ Па, плотность равна 7800 кг/м^3.
7. Груз какой массы может быть подвешен на стальном тросе диаметром 3 см при десятикратном запасе прочности, если предел прочности стали равен $7 \cdot 10^8$ Па?
8. Балка AB, один конец которой укреплен шарнирно на стене, удерживается в горизонтальном положении тросом BC (рис. 9.57), $AC = 3$ м. Длина балки равна 4 м, а ее масса 1000 кг. Определите необходимую площадь сечения троса, если допустимое напряжение в нем не должно превышать 10^8 Па.
9. Однородный стержень длиной l и плотностью ρ движется с постоянным ускорением $\vec{a}$ по гладкой горизонтальной поверхности. Как распределяется напряжение в материале стержня вдоль его длины? Сила приложена к одному из концов стержня.

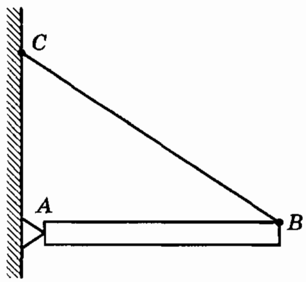


Рис. 9.57

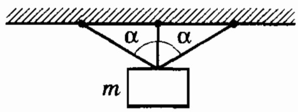


Рис. 9.58

10. Груз массой $m = 10$ кг удерживается тремя тросами (рис. 9.58) одинакового сечения и материала. Тросы расположены в одной плоскости: средний вертикально, а два других составляют с ним угол $\alpha = 60°$. Чему равны силы упругости, возникающие в тросах?

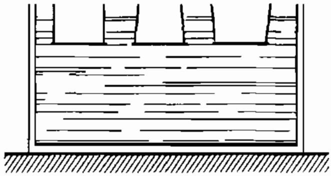


Рис. 9.59

11. Три сосуда с приставным дном погружены в воду на одинаковую глубину. Дно каждого из сосудов (рис. 9.59) отпадает, если налить в них по 1 кг воды. Отпадет ли дно, если: а) налить в сосуды по 1 кг масла; б) налить в сосуды по 1 кг ртути; в) положить в каждый сосуд по гире массой 1 кг?

12. Какова должна быть минимальная мощность садового насоса, поднимающего воду из колодца глубиной 20 м? Площадь сечения трубы, по которой подается вода, равна 10 см^2. Насос перекачивает ежесекундно 100 л воды.

13. Кубик льда плавает в воде. Поверх воды наливают керосин вровень с верхней гранью кубика. Какая часть объема кубика будет находиться в воде? Плотность воды 10^3 кг/м^3, плотность льда 900 кг/м^3, плотность керосина 800 кг/м^3.

14. Тонкий однородный стержень шарнирно закреплен за верхний конец. Снизу под стержень ставят сосуд с водой. Плотность материала стержня меньше плотности воды. Так как вертикальное положение стержня, погруженного нижней частью в жидкость, неустойчиво, то стержень оказывается в равновесии в отклоненном от вертикали положении. Определите плотность материала стержня, если он погружен в воду наполовину. Плотность воды 1000 кг/м^3.

15. Полое тело, отлитое из алюминия, плавает в воде, погрузившись в воду ровно наполовину. Объем тела, включая полость, равен $V_0 = 400$ см^3. Определите объем V полости. Плотность алюминия $\rho_а = 2700$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3.

16. В цилиндрическом сосуде с водой плавает кусок льда, внутри которого замерзла цинковая пластинка. Когда лед растаял, уровень воды в сосуде понизился на $\Delta h = 3$ см. Какова масса цинковой пластинки? Внутренний диаметр сосуда $d = 30$ см; плотность цинка $\rho_ц = 7000$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3.

17. В сообщающиеся сосуды с разными диаметрами была налита ртуть. После того как в узкий сосуд налили слой масла высотой $H = 0{,}6$ м, уровень ртути в широком сосуде повысился относительно первоначального уровня на $h = 7$ мм. Найдите отношение диаметров сообщающихся сосудов $\frac{D}{d}$. Плотность ртути $\rho_1 = 136\,000$ кг/м^3, плотность масла $\rho_2 = 800$ кг/м^3.

18. Сплав свинца и олова имеет в воде вес $P_1 = 500$ Н, а в масле $P_2 = 510$ Н. Определите массу свинца $m_с$ в слитке. Плотность свинца $\rho_с = 11\ 300$ кг/м^3, олова $\rho_о = 7400$ кг/м^3, воды $\rho_в = 1000$ кг/м^3, масла $\rho_м = 800$ кг/м^3.

19. Малый поршень гидравлического пресса за один ход опускается на расстояние $h = 0{,}2$ м, а большой поршень поднимается на высоту $H = 0{,}01$ м. С какой силой F действует пресс на сжимаемое в нем тело, если на малый поршень действует сила $f = 500$ Н?

20. Судно получило большую пробоину в боковой подводной части. В какую сторону оно начнет перемещаться вследствие этого?

21. В дне бака высотой 50 см, полностью заполненного водой, имеется отверстие площадью 1 см^2, значительно меньшей площади сечения бака. Если открыть отверстие, то из него начинает вытекать струя воды и падать вниз. Чему равна площадь сечения струи на высоте 20 см ниже дна?

22. Труба расположена горизонтально. В широкой части трубы диаметром D расположен поршень и на него действует постоянная сила $\vec{F}$. Узкая часть трубы имеет диаметр d, и из нее вытекает струя воды. Найдите скорость перемещения поршня. Трение не учитывать.

23. Колба движется в горизонтальном направлении с постоянным ускорением. В колбе стоит зажженная свеча. В каком направлении отклонится пламя свечи?

24. В широкой части горизонтальной трубы вода течет со скоростью 8 см/с при давлении $1{,}5 \cdot 10^5$ Па. В узкой части трубы давление равно $1{,}4 \cdot 10^5$ Па. Найдите скорость течения воды в узкой части трубы. Трение не учитывать.

25. Какова высота h столбика ртути в ртутном барометре, помещенном в лифте, движущемся с ускорением, направленным вниз и равным по модулю $a = \frac{1}{2}g$, если атмосферное давление равно $p_0 = 760$ мм рт. ст.?

26. На гладкой горизонтальной поверхности стоит сосуд с водой. В боковой стенке сосуда у дна имеется отверстие площадью S. Какую силу надо приложить к сосуду, чтобы удержать его в равновесии, если высота уровня воды в сосуде равна h?

27. Как приближенно оценить скорость катера v, если вода поднимается вдоль носовой вертикальной части катера на высоту $h = 1$ м?

МЕХАНИКА — СОВРЕМЕННАЯ РАЗВИВАЮЩАЯСЯ НАУКА

Классическая механика — фундамент современной физики

Вы познакомились с классической механикой Ньютона. Законы Ньютона, лежащие в ее основе, изучены нами довольно подробно. Но из бесчисленных применений этих законов были рассмотрены лишь наиболее простые. В дальнейшем вы познакомитесь с более сложными механическими процессами — с механическими колебаниями. Еще более сложные задачи механики, такие, как произвольное движение твердого тела в случаях, когда необходимо учитывать его размеры и форму, выходят за рамки школьного курса физики. Точно так же в школе не рассматриваются сложные задачи по расчету движений, при которых важную роль играют деформации тел (в частности, движение жидкостей и газов).

При старте ракет и при вхождении космических кораблей в плотные слои атмосферы, кроме сил тяготения, очень существенное влияние на полет оказывают силы сопротивления воздуха. При больших скоростях движения стенки космического корабля и прилегающие слои воздуха сильно разогреваются, и необходимо учитывать влияние тепловых процессов, сопутствующих механическому движению. Весьма сложные расчеты приходится выполнять при исследовании работы реактивных двигателей, газовых турбин и т. д.

В настоящее время далеко не все задачи механики, представляющие интерес, уже решены.

Механика Ньютона теснейшим образом связана со всеми другими разделами физики. При построении молекулярно-кинетической теории тепловых процессов мы будем опираться на законы классической механики, применяя их с некоторыми ограничениями для исследования движения отдельных молекул и атомов. Понадобятся законы механики и при изучении электродинамики.

Даже при знакомстве с движением электронов и других элементарных частиц мы будем опираться на классическую механику. Хотя в общем случае движение элементарных частиц подчиняется законам новой, квантовой, механики, такие понятия, как импульс, энергия и др., введенные в механике Ньютона, используются и в квантовой механике.

Несмотря на то что классическая механика составляет сравнительно небольшую часть всего здания современной физики, она была и остается тем прочным фундаментом, без которого построение этого здания было бы невозможным.

Открытие динамического хаоса

Совсем недавно, около 30 лет назад, произошло событие, не имеющее прецедента во всей истории физики. Спустя почти 300 лет после выхода главного труда Ньютона «Математические начала натуральной философии» в рамках классической механики было сделано принципиально новое открытие. Его можно считать одним из значительнейших открытий физики XX в.

Было обнаружено, что в простых механических системах с небольшим числом переменных, характеризующих их состояние, возможны сложные непредсказуемые, случайные движения. Причем эта случайность носит принципиальный характер: от нее нельзя избавиться, уточняя начальные условия и набирая бóльшую информацию о возможных воздействиях на систему. Порожденную таким образом ситуацию и стали называть *хаосом* или *динамическим хаосом*.

Видимый парадокс состоит в том, что движение в принципе полностью однозначно определяется начальными условиями и уравнениями движения и само по себе не включает никаких произвольных элементов случайности. Однако даже сколь угодно малые неопределенности в начальных условиях очень быстро нарастают, и поэтому поведение системы может быть предсказано только на очень и очень малых интервалах времени, а на более или менее длительные сроки предсказания совершенно невозможны. Движение оказывается неустойчивым.

Простой пример неустойчивого движения — это движение шарика на плоскости, ограниченной стенками, из которых хотя бы одна является вогнутой (бильярд Синая). Две, вначале очень близкие, траектории (сплошная и штриховая линии на рисунке 9.60) очень быстро расходятся, и это расхождение экспоненциально нарастает со временем.

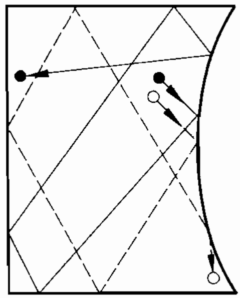


Рис. 9.60

Хаотические системы чувствительны не только к начальным условиям, но и к вариациям положения и скорости в каждой точке своей траектории.

Допустим, на компьютере мы решаем задачу с точно фиксированными начальными условиями. Например, рассчитываем траекторию шарика в бильярде Синая. Однако в случае сильной неустойчивости это решение лишено смысла. Результаты расчета даже приближенно не будут совпадать с реально наблюдаемым движением. Ведь малейшие изменения начальных условий приведут к совершенно другой траектории по истечении даже небольшого интервала времени. А фиксировать совершенно точно начальные условия в реальной задаче мы не можем. Решения основной задачи механики Ньютона реализуются в действительности, если системы у с т о й ч и в ы, т. е. малые изменения начальных условий вызывают незначительные изменения траекторий движения тел системы (к таким устойчивым системам относится наша Солнечная система).

Ясно, например, что невозможно наблюдать карандаш сколь угодно долго стоящим на острие. Однако решение уравнений для этого состояния существует.

В результате появляется необходимость применять для неустойчивых систем статистические методы, использующие понятие вероятности.

Открытие хаотического поведения систем по-новому ставит вопрос о предсказуемости широко распространенных явлений природы. Так, долгосрочные прогнозы погоды вряд ли могут быть реализованы. Атмосферные процессы неустойчивы, а это означает невозможность не то чтобы точных, но даже приблизительных предсказаний поведения системы на большие сроки.

Замечательно, что взаимодействие частей системы может вызывать глобальные изменения поведения самой системы, которые нельзя вывести из поведения ее частей. Две подсистемы с устойчивым поведением могут превратиться в хаотическую систему при объединении подсистем.

Наибольший интерес представляют собой хаотические движения механических и электромагнитных нелинейных колебательных систем.

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

Упражнение 1

1. –20 м; 40 м.
2. 0; 40 м.
3. 4 м/с, противоположно положительному направлению оси X.

Упражнение 2

1. 5,6 м/с, под углами 45° к осям координат.
2. $y = 6$ м $- 0{,}5x$; $x_0 = 0$, $y_0 = 6$ м, $x_1 = -4$ м, $y_1 = 8$ м. Полупрямая во второй координатной четверти.
3. Графики изображены на рисунке 1, *а, б, в*.
4. Части графика BC и CD неверны, так как путь не может убывать и не бывает отрицательным.
5. Графики изображены на рисунке 2, *а, б*.
6. $v_1 = 53{,}3$ км/ч; $v_2 = 60$ км/ч.

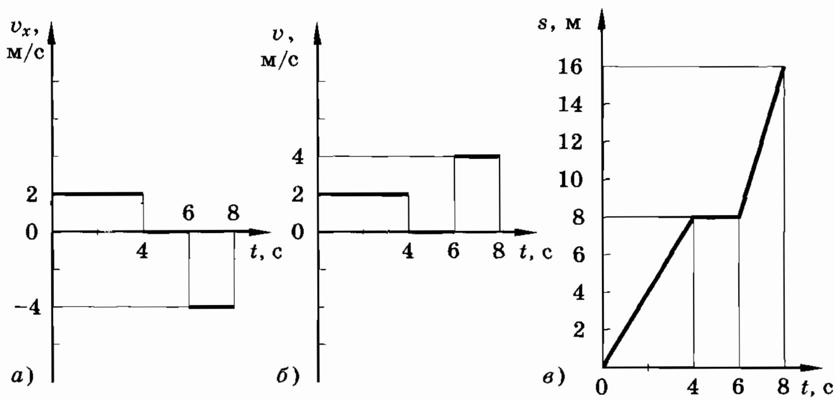


Рис. 1

7. $\sin\alpha \geqslant \dfrac{av_1}{bv_2}$; $36°45' \leqslant \alpha \leqslant 143°15'$.

8. $u = \dfrac{v}{\cos\alpha}$.

Упражнение 3

1. 12 м, 16 м, 12 м; 4 м/с — вверх вдоль плоскости; 0; 4 м/с — вниз вдоль плоскости; 17 м.
2. 30 с; 60 м; 60 м; 135 м.
4. 84,7 км/ч.
5. 0,22 м/с^2, 0,33 м/с.
6. 5 м/с.
7. $t_2 = t_1(2 + \sqrt{2})$.
8. $v = \sqrt{La}$.
9. См. рисунок 3.

Упражнение 4

1. 1 с; 5 с.
2. 20,6 см.
3. 330 м.
4. 4,3 с.
5. 30 м/с; 20 м/с, вверх, а потом вниз.
6. $\dfrac{v_0}{g} + \dfrac{\tau}{2}$.
7. 30 м/с; 42 м/с.
8. 30 м/с.
9. 15 м.
10. $l_1 = 8H\sin\alpha$, а далее $l_1 : l_2 : l_3 \ldots = 1 : 2 : 3 \ldots$; $l_1 = 2{,}8$ м.
11. 2 кг.
12. $l = v_0 t\sqrt{2(1 - \sin\alpha)} \approx 22$ м.
13. $\mathrm{ctg}\,\alpha = 0{,}25$; $\alpha = 76°$.

Упражнение 5

1. 0,5 м/с^2.
2. 10 м.
3. 200 км.
4. 30 км.
5. $v_0 = \sqrt{5Rg}$, $\alpha = 64°$.
6. $\dfrac{v^2\cos^2\alpha}{r}$.

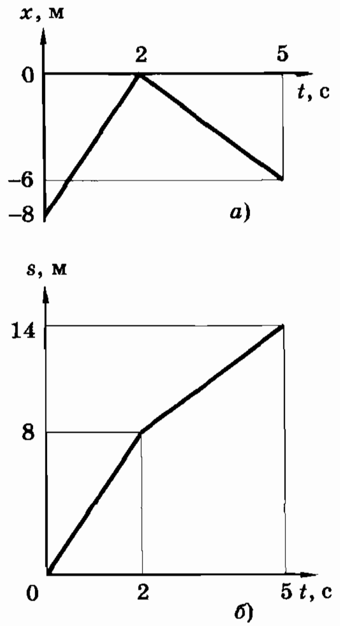


Рис. 2

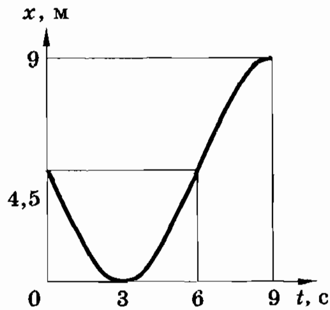


Рис. 3

7. 25 м/с^2.
8. 25 м/с; 0,71 м/с^2.
9. 8,9 м/с^2.
10. $-0{,}1\pi$ рад/с^2.
11. $v_2 = 150$ м/с, $a_\tau = 10$ м/с^2, $a_n = 22\,500$ м/с^2, $a \approx 22\,500$ м/с^2.
12. 0,5 с.
13. 5 с.

Упражнение 6

1. 30 км/ч.
2. 20 с.
3. 2,5 м/с.
4. 4 м/с.
5. 62 км/ч.
6. 1,5 мин.
7. а) 144 км/ч; б) 0; в) 102 км/ч под углом 45° к горизонту.
8. Эскалатор движется вниз; 150.
9. 35 суток.
10. 25 м; сопряженные отрезки парабол с вершинами в начале и конце движения.
11. 187,5 м вверх по течению или 62,5 м вниз по течению.
12. 2°54′ относительно указанной прямой.
13. 13,4 м/с под углом 63° к линии MO.
14. $d = l\dfrac{(v_2 - v_1)}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$.
15. $u = \dfrac{vb}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.
16. $g + a$, $g - a$.

Упражнение 7

1. Ускоренное; в конце четвертой секунды.
2. См. рисунок 4.
3. 3 Н.
4. $T = 2\pi\left(\dfrac{L\cos\alpha}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$; $F \geqslant \sqrt{5}\,mg$.
5. $F = \dfrac{mv^2}{2(l_1 + l_2)} = 6750$ Н.
6. 2,6 Н, вниз; 0; 0,9 Н, вверх.
7. 14 Н, под углом 45° к радиусу окружности.
8. 7 м/с^2; 17 Н; 9 Н.
9. 0,5mg; mg.

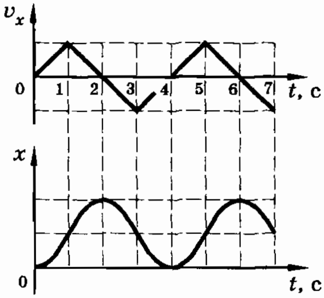


Рис. 4

10. График *1* выражает зависимость $F = \frac{mv^2}{r}$ при $v = \text{const}$. График *2* — зависимость $F = m\omega^2 r$ при $\omega = \text{const}$.

11. $T = mg\cos\alpha - m\omega^2 R\sin\alpha$; $P = mg\sin\alpha + m\omega^2 R\cos\alpha$.

12. Подвесить кофемолку на нити и включить мотор. В соответствии с третьим законом Ньютона она будет вращаться в направлении, противоположном направлению вращения ротора двигателя.

13. Уравнение движения имеет два решения: $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = \arccos\frac{g}{\omega^2 l}$, где $\omega = 2\pi\nu$. Во втором случае имеют место оба решения: $\alpha_1 = 0$ (при этом шарик находится в состоянии неустойчивого равновесия) и $\alpha_2 = 60°$. В первом случае имеет место только решение $\alpha_1 = 0$.

Упражнение 8

1. Тело следует расположить на линии, соединяющей центры Луны и Земли, в точке, отстоящей на 6 земных радиусов от центра Луны.

2. $h = R_З\left(1 - \frac{g_h}{g_0}\right) = 65$ км.

3. $\approx 1{,}7$ м/с^2.

4. $\approx 2{,}5$ м/с^2.

5. $T = 2\pi\sqrt{\frac{R_0 + 3H}{g}} \approx 2\pi\sqrt{\frac{R_0}{g}}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{H}{R_0}\right)$.

6. $\Delta l = \frac{F}{2k}$.

7. а) $k = k_1 + k_2$; б) $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$.

8. $\Delta l = \frac{m(a + \mu g)}{k} \approx 0{,}03$м.

9. $n > \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu g}{R}} \approx 0{,}16$ с$^{-1}$.

10. $t = \sqrt{\frac{2h\cos\beta}{g\sin\alpha\sin(\alpha - \beta)}} = 1{,}9$ с.

11. $a = \frac{F}{m}\left(\cos\alpha_2 - \frac{mg - F\sin\alpha_2}{mg - F\sin\alpha_1}\cos\alpha_1\right) \approx 0{,}77$ м/с^2.

12. $t_2 = t_1\sqrt{\frac{l}{gt_1^2\sin\alpha - l}} \approx 0{,}83$ с; $\mu = \frac{2l}{gt_1^2\cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}10$.

13. $h = R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu g + a}{g - \mu a}\right)^2}}\right) = 0{,}4$ м.

14. $F = a(m_1 + m_2) + 2m_2\mu g \approx 24{,}5$ Н.

15. $mg\sin\alpha$ до угла $\alpha_0 = \mathrm{arctg}\,\mu$, а потом $\mu mg\cos\alpha$ (см. рис. 5).

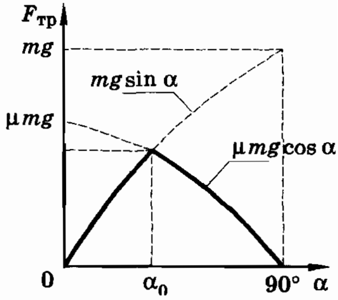


Рис. 5

16. $T = \dfrac{1}{2}(m_1 - m_2)g$.

Упражнение 9

1. 7 м/с^2 и 1 м/с^2.
2. 10^3 Н.
3. $T = \sqrt{\dfrac{6\pi}{\rho G}}$; $T = 160$ мин.
4. $T = mn^2 l = 72$ Н.
5. $a = \dfrac{\mu + \mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mu\,\mathrm{tg}\,\alpha}\,g$. При $\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha = 1$ тело ни при каких значениях ускорения не будет подниматься.
6. $T = m(g\sin\alpha + a\cos\alpha)$; $P = m(g\cos\alpha - a\sin\alpha)$ при $g\cos\alpha \geqslant a\sin\alpha$, иначе $P = 0$.

Упражнение 10

1. 200 Н.
2. 200 Н.
3. Скорость тележки не изменяется.
4. 0,75 м/с.
5. 217 м/с.
6. $u = \dfrac{mv\cos\alpha}{m + M}$.
7. $l = 4a$.
8. $\Delta m = \dfrac{1}{31}M$.
9. Конечная скорость лодок в первом случае будет больше.
10. $v_1 = \dfrac{Mv + m(v + u)}{M + m}$, $v_2 = v$, $v_3 = \dfrac{Mv + m(v - u)}{M + m}$.
11. $v = \dfrac{lgt}{4H}$, $v_2 = \sqrt{\dfrac{g^2 l^2 t^2}{4H^2} + \dfrac{(2H - gt^2)^2}{4t^2}}$.
12. $\dfrac{m_1 l}{m_1 + m_2}$.
13. Клин движется влево при $\dfrac{m_1}{m_2} \leqslant \sin\alpha - \mu\cos\alpha$. Клин движется вправо при $\dfrac{m_1}{m_2} \leqslant \sin\alpha + \mu\cos\alpha$.

При равновесии $\sin\alpha - \mu\cos\alpha \leqslant \dfrac{m_1}{m_2} \leqslant \sin\alpha + \mu\cos\alpha$.

14. С такой же скоростью $\vec{v}$.

15. $p = \sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 \cos\alpha}$.

16. $v = \dfrac{\rho S u^2}{k}$.

17. $F = m\left(g + \dfrac{v^2}{l}\right)$.

Упражнение 11

1. При соударении на шарик со стороны стенки действует сила, направленная все время в одну сторону. Поэтому импульс шарика меняется. Перемещение шарика в процессе соударения сначала происходит в сторону, противоположную направлению силы $\vec{F}$, действующей со стороны стенки, а затем по направлению $\vec{F}$. Поэтому работа силы $\vec{F}$ равна нулю и кинетическая энергия не меняется.
2. 15 Дж.
3. 9,8 кВт.
4. $Q_V = \dfrac{N}{\rho g H \eta} = 10^3$ м^3/с.
5. $H = \dfrac{v_0^2}{4g} = 61{,}25$ м.
6. $\Delta T = 6mg$.
7. $14mg$; $4mg$.
8. 1300 кДж.
9. $s = \dfrac{H(1 - \mu \operatorname{ctg}\alpha)}{\mu}$. При $\mu > \operatorname{tg}\alpha$ санки останутся на месте.
10. $A = \dfrac{5}{4} mgl = 1{,}2$ Дж.
11. Давление воды у дна стакана больше, чем у поверхности. Поэтому кинетическая энергия воды, втекающей в сосуд, открытый у дна, больше, чем кинетическая энергия воды, втекающей в сосуд у поверхности. Следовательно, в конечном счете вода больше нагреется во втором случае, чем в первом.
12. $E_k = \dfrac{m_1^2 v^2}{2(m_1 + m_2)} = 17{,}68$ Дж.
13. $u = \dfrac{v}{2}$.
14. $\dfrac{mMv^2}{2(m + M)}$.
16. Время падения больше времени подъема.
17. $v = \sqrt{gl}$.
18. $2mgh$.

19. $v\sqrt{\dfrac{m}{m+M}}$.

20. $s = \dfrac{(M-m)^3 v^3}{2M^2 N} \approx 300$ м.

21. 3 250 000 Н.

22. $A = \dfrac{3}{8}\rho g S H^2 + \dfrac{1}{16}\dfrac{\rho H^3 S^3}{\pi^2 R^4 t^2}$.

23. Изменение импульса тела равно импульсу приложенной к нему силы. Так как силы, действующие на камень и Землю, равны по модулю и действуют одинаковое время, то равны и изменения импульсов этих тел.

Изменение кинетической энергии тела равно работе, которая зависит от силы и от перемещения. Силы одинаковы, а перемещения камня и Земли, обратно пропорциональные их массам, различны. За время падения камня перемещение Земли будет столь малым, что им можно пренебречь. Поэтому закон сохранения энергии можно записать в форме, не учитывающей изменение кинетической энергии Земли.

24. В движущейся системе отсчета сила реакции плоскости не перпендикулярна скорости кубика. Она и совершает работу, уменьшающую энергию кубика.

25. $h = \dfrac{5}{3}R$, $H = \dfrac{25}{16}R$.

26. $v = \sqrt{2\mu g l}$, $\Delta E = \dfrac{m}{2}\left(v_0 + \sqrt{2\mu g l}\right)^2$.

Упражнение 12

1. 96 об/мин.
2. а) 465 м/с; б) 233 м/с.
3. 2,83 м/с под углом 45° к горизонтальному диаметру.
4. $\omega = \dfrac{v \sin^2\alpha}{h}$.
5. $v_B = \dfrac{R-r}{r}v$.
6. $v_B = 2\omega(R+r) = 1$ м/с.

Упражнение 13

1. Вначале тележка будет совершать колебательное движение относительно положения центра масс системы, так как жидкость в сосуде будет некоторое время колебаться. Когда колебания затухнут, то тележка окажется смещенной влево, так как положение центра масс не должно измениться. Если массой жидкости в трубке мож-

но пренебречь по сравнению с массой жидкости в сосуде, то смещение тележки будет равно расстоянию от оси левого сосуда до крана.

2. Центр масс будет двигаться поступательно вправо, а грузы будут совершать колебания относительно центра масс.

3. Центр масс пластинки будет двигаться по параболе как материальная точка, брошенная горизонтально, а пластинка будет вращаться вокруг этого центра масс.

4. $x = \dfrac{m}{M + m}(a - b)$.

5. Центр масс системы находится от центра обруча на расстоянии $l = \dfrac{mR}{M + m}$. Центр обруча будет описывать окружность радиусом l.

Жук будет двигаться по окружности радиусом $L = \dfrac{MR}{M + m}$. Центрами обеих окружностей является центр масс системы.

6. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2L}{3g}}$.

7. $l_m = \dfrac{LM}{m + M}$, $l_M = \dfrac{Lm}{m + M}$.

8. $a_c = \left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 g$ и направлено вниз.

9. $v = 2\sqrt{\dfrac{3}{5}gl}$.

10. $l_{min} = l_0 - \dfrac{F}{k}$, $l_{max} = l_0$.

11. $F = \dfrac{4\pi^2 MRm}{(m + M)T^2}$.

12. См. рисунок 6.

Упражнение 14

2. $a = \dfrac{2}{3}g\sin\alpha$; $f = \dfrac{1}{3}mg\sin\alpha$.

3. $\omega_1 = \dfrac{2m_1 + m}{m}\omega$.

4. $J = \dfrac{m(g - \beta R)R}{\beta} = 22{,}5$ кг · м^2.

5. $a = \dfrac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \dfrac{m}{2}} = 1{,}7$ м/с^2.

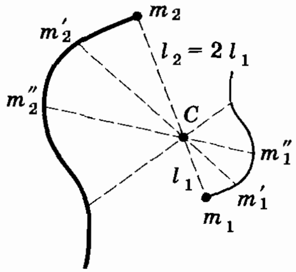


Рис. 6

Упражнение 15

1. 120°.

2. $T = \frac{mg}{R}\sqrt{(R + r)^2 - R^2}$; $N = mg\left(1 + \frac{r}{R}\right)$.

3. $F_1 = F_3 = \frac{mg}{4}$; $F_2 = \frac{mg}{2}$.

4. 3 кг.

5. $N_2 = mg$; $N_1 = T = 0{,}5mg\,\mathrm{ctg}\,\alpha$.

6. $\mu \geqslant \frac{1}{3}$.

7. $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{3}$.

8. $F_{\min} = \frac{F}{\sqrt{2}}$, перпендикулярно линии BD.

9. Левая.

10. $v_{\min} = \sqrt{\frac{gR}{\mu}} \approx 12$ м/с; $\mathrm{ctg}\,\alpha = \mu$, $\alpha = 68°$.

12. $v_{0\min} \geqslant \left\{2g\sin\alpha\left[L - l + \frac{m_1}{m_2}\left(\frac{L}{2} - l\right)\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \approx 5{,}5$ м/с.

13. $\mu_{\min} = \frac{r}{R\sin\alpha} = 0{,}2$.

14. $F = mg = 100$ Н.

15. $\mathrm{tg}\,\alpha = \mu$; $F_{\min} = \frac{\mu mg}{\sqrt{1 + \mu^2}}$.

16. $F_{\min} = \frac{1}{2}mg$, перпендикулярно стержню BD.

17. $x = \frac{h^2}{d + 2h}$.

18. Центр тяжести находится на расстоянии $\frac{r^2R}{2(R^2 - r^2)}$ от центра диска.

19. $a > \frac{l}{h}g$.

Упражнение 16

1. $1{,}9 \cdot 10^3$ Н.

2. $3{,}6 \cdot 10^5$ Па.

3. $4 \cdot 10^7$ Па; $2 \cdot 10^{11}$ Па.

4. 200 Н.
5. 5 Дж.
6. 4 км.
7. 49 т.
8. 83 $мм^2$.
9. В точке приложения силы напряжение равно $\rho a l$, а потом оно убывает линейно вдоль стержня до нуля.

10. $F_1 = F_3 = \dfrac{mg\cos^2\alpha}{1 + 2\cos^3\alpha} \approx 20$ Н; $F_2 = \dfrac{mg}{1 + 2\cos^3\alpha} \approx 80$ Н.

11. В цилиндрическом сосуде дно отпадет во всех трех случаях. В сосуде, суживающемся кверху, дно отпадет только при наливании масла. В сосуде, расширяющемся кверху, дно отпадет при наливании ртути, а также под действием гири.
12. 20 кВт.
13. Половина объема кубика.
14. 750 $кг/м^3$.

15. $V = V_0\left(1 - \dfrac{\rho_в}{2\rho_а}\right) \approx 3{,}3 \cdot 10^{-4}$ $м^3$.

16. $m = \dfrac{\pi d^2 \Delta h}{4} \cdot \dfrac{\rho_в \rho_ц}{\rho_ц - \rho_в} \approx 2{,}5$ кг.

17. $\dfrac{D}{d} = \left(\dfrac{H\rho_2}{h\rho_1} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \approx 2.$

18. $m_с = \dfrac{\rho_с\{P_1(\rho_о - \rho_м) - P_2(\rho_о - \rho_в)\}}{g(\rho_в - \rho_м)(\rho_с - \rho_о)} \approx 53$ кг.

19. $F = \dfrac{fh}{H} = 10^4$ Н.
20. Навстречу втекающему потоку воды.
21. 0,84 $см^2$.

22. $v = \sqrt{\dfrac{8Fd^4}{\pi\rho D^2(D^4 - d^4)}}$.

23. В направлении ускорения.
24. 4,5 м/с.

25. $h = \dfrac{Hg}{g - a} = 1520$ мм.

26. $F = 2\rho g h S$.
27. $v = \sqrt{2gh} \approx 4{,}4$ м/с.

Оглавление

Введение

дрофа

книги ME [illegible] Физика
Механика 10 класс Профильный уровень

ISBN 978-5-358-08027-0
9 785358 080270